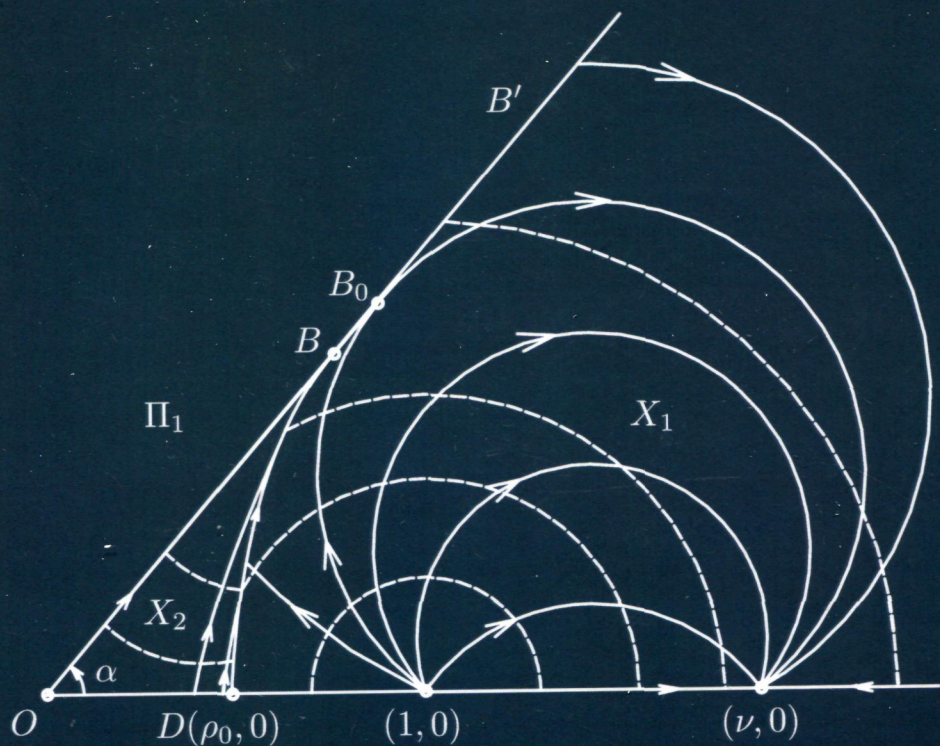


Арик Меликян

Приложения к задачам теории управления
и дифференциальным играм

Обобщенные характеристики уравнений в частных производных первого порядка



УДК 517.95, 517.977
ББК 22.161.6, 22.161.8
М 47

Меликян А.А.

Обобщенные характеристики уравнений в частных производных первого порядка. Приложения к задачам теории управления и дифференциальным играм. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2014. — 450 с.

Классический метод характеристик Коши для уравнений в частных производных первого порядка предполагает наличие гладкого решения таких уравнений. В то же время в математической физике, теории оптимального управления и теории дифференциальных игр широко используется понятие вязкостного (минимаксного) решения, охватывающее случай кусочно-гладкого решения. А.А. Меликян разработал метод обобщенных (сингулярных) характеристик, позволяющий исследовать, а в простых случаях даже находить вязкостное решение.

Настоящее издание содержит перевод книги А.А. Меликяна на эту тему, вышедшей на английском языке в 1998 году. В добавлении приведен перевод нескольких статей А.А. Меликяна, опубликованных на английском языке после 1998 года.

Для специалистов в области уравнений в частных производных, теории оптимального управления и теории дифференциальных игр, а также для студентов старших курсов учебных заведений и аспирантов.

ISBN 978-5-4344-0198-2

ББК 22.161.6, 22.161.8

© Карине Георгиевна Меликян, Заруи Ариковна Меликян,
Артем Арикович Меликян, 2014

© Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, 2014

Оглавление

Об Арике Артаваздовиче Меликяне	7
Предисловие	19
Введение	23
ГЛАВА 1. Метод характеристик в гладких задачах	29
1.1. Задача Коши для УЧП первого порядка	29
1.1.1. Постановка задачи	29
1.1.2. Уравнения характеристик	30
1.1.3. Начальные условия	31
1.1.4. Замечание о решении в малом	33
1.1.5. Построение дважды дифференцируемого решения	33
1.1.6. Нерегулярная характеристическая задача	35
1.1.7. Пример на плоскости. Постановка задачи	39
1.1.8. Построение решения	40
1.2. Задача Коши для интегральных поверхностей	41
1.2.1. Геометрическая постановка задачи 1.1	41
1.2.2. Обобщенная задача Коши	42
1.2.3. Характеристическое поле на многообразии	45
1.2.4. Построение базисного решения	48
1.2.5. Выражение для λ при малых t	50
1.2.6. Достаточные условия для задач 1.3, 1.4	50
1.2.7. Геометрия характеристического поля	52
1.2.8. Характеристические точки многообразия W	53
1.2.9. Пример характеристической системы для случая $m = 1$	55
1.3. Задача Коши с подвижной границей	56
1.3.1. Регулярная задача с подвижной границей	56
1.3.2. Нерегулярная задача	59
1.3.3. Скобки Якоби различных уровней	60
1.3.4. Достаточное условие	61
1.3.5. Классическая нерегулярная нехарактеристическая задача	63
1.3.6. Иллюстративный пример	72
Упражнения	75
ГЛАВА 2. Обобщенные решения и сингулярные характеристики УЧП первого порядка	77
2.1. Вязкостные решения и их сингулярные многообразия	77
2.1.1. Определение вязкостного решения	77

2.1.2.	Регулярные и сингулярные точки решения. Простейшая сингулярность	79
2.1.3.	Необходимые условия простейшей сингулярности	82
2.1.4.	Сингулярные характеристики: определение и классификация	84
2.1.5.	Некоторые свойства задач с начальными и терминальными значениями	85
2.2.	Рассеивающая поверхность	86
2.2.1.	Основные условия	86
2.2.2.	Линейные и нелинейные гамильтонианы	87
2.3.	Сингулярные характеристики для эквивокальной поверхности	90
2.3.1.	Четыре типа поверхностей, необходимые условия	90
2.3.2.	Уравнения сингулярных характеристик	92
2.3.3.	Некоторые свойства характеристической системы	94
2.4.	Сингулярные характеристики для фокальной поверхности	96
2.4.1.	Шесть типов поверхностей, необходимые условия	96
2.4.2.	Фокальная поверхность — гиперплоскость	99
2.4.3.	Несимметричная поверхность, коллинеарные поля	102
2.4.4.	Вырожденные поверхности	105
2.4.5.	Начальные условия и идентификация сингулярных поверхностей	106
2.4.6.	Изменения для задач с терминальными значениями	106
2.5.	Пример задачи с заданными начальными условиями	107
2.5.1.	Постановка задачи	107
2.5.2.	Случай 1), $a < b$	109
2.5.3.	Случай 2), $a = b$	111
2.5.4.	Случай 3), $a > b$	112
2.5.5.	Некоторые изменения для несимметричного случая	114
2.5.6.	Заключительные замечания	117
	Упражнения	118
ГЛАВА 3. УЧП первого порядка в вариационном исчислении, оптимальном управлении и дифференциальных играх		119
3.1.	Уравнение Гамильтона – Якоби в вариационном исчислении	119
3.1.1.	Формула первой вариации	119
3.1.2.	Случай неоднородного лагранжиана	122
3.1.3.	Вариационная задача о минимальной геодезической	123
3.1.4.	Классический однородный лагранжиан	125
3.2.	Уравнение Беллмана в оптимальном управлении	126
3.2.1.	Задача с фиксированным временем	126
3.2.2.	Задача быстрогодействия	128
3.2.3.	Управления обратной связи	131
3.3.	Уравнение Айзекса в дифференциальных играх	131
3.3.1.	Игра с фиксированным моментом окончания. Функция цены	131
3.3.2.	Игры преследования	134
3.4.	Обобщенные решения уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса	135

3.4.1.	Классические и вязкостные решения	135
3.4.2.	Обобщенное основное уравнение, неравенства А.И. Субботина	137
3.5.	Сингулярные траектории и сингулярные характеристики	139
3.5.1.	Сингулярные поверхности и траектории: определение и классификация	139
3.5.2.	Экивокальная поверхность	142
3.5.3.	Сингулярные траектории и характеристики	145
3.6.	Линейная игра преследования с эллиптическими вектограммами	146
3.6.1.	Постановка задачи	146
3.6.2.	Рассеивающая поверхность	148
3.6.3.	Фокальная поверхность	150
3.6.4.	Граница индифферентной зоны	152
Упражнения		153
ГЛАВА 4. Дифференциальные игры с простыми движениями на многообразиях		
4.1.	Постановка задачи	155
4.1.1.	Игры с простыми движениями	155
4.1.2.	Уравнения динамики	156
4.1.3.	Функции платы для двух игр	158
4.2.	Первичное решение	158
4.2.1.	Свойства геодезической линии	158
4.2.2.	Первичная и вторичная области	159
4.3.	Необходимые условия оптимальности	160
4.3.1.	Обобщенное основное уравнение, регулярные траектории	160
4.3.2.	Сингулярная (особая) поверхность в первичной области	162
4.3.3.	Анализ поверхности Γ_0 с использованием условий вязкостного решения	166
4.4.	Две ветви экивокальной поверхности	170
4.4.1.	Определение экивокальных поверхностей	170
4.4.2.	Основной результат	173
4.4.3.	Алгоритм построения	175
4.5.	Игра преследования с препятствием	176
4.5.1.	Постановки задачи	176
4.5.2.	Плоская задача	179
4.5.3.	Примеры	181
Упражнения		185
ГЛАВА 5. Игры простого преследования и сближения на двумерном конусе		
5.1.	Формулировка игры в различных системах координат	187
5.1.1.	Динамика в декартовых и относительных переменных	187
5.1.2.	Автомодельные переменные, комплексные координаты	191
5.1.3.	Первичные решения	193
5.2.	Анализ первичной области	194

5.2.1.	Необходимые условия оптимальности	194
5.2.2.	Построение множества B , параметрический анализ	196
5.2.3.	Построение эквивокальной поверхности	200
5.3.	Исследование вторичной области	201
5.3.1.	Игра преследования	201
5.3.2.	Критический конус при $\nu = 1 - \sin \alpha$	205
5.3.3.	Игра сближения	207
5.3.4.	Случай $\nu = 1$	210
5.3.5.	Об алгоритме синтеза и компьютерном моделировании	212
Упражнения		215
ГЛАВА 6. Гладкие решения УЧП с негладким гамильтонианом		217
6.1.	Сингулярные траектории в оптимальном управлении. Анализ на основе программного и синтезирующего подходов	217
6.1.1.	Введение	217
6.1.2.	Сингулярная дуга в задаче оптимального управления, программный подход	219
6.1.3.	Линейная задача	219
6.1.4.	Два набора переменных	221
6.1.5.	Необходимые условия в инвариантной форме	222
6.1.6.	Сингулярная универсальная поверхность в общей задаче	223
6.2.	Уравнения в частных производных первого порядка	225
6.2.1.	Необходимые условия для сингулярной гиперплоскости	225
6.2.2.	Вспомогательная теорема	227
6.2.3.	Необходимые условия в инвариантной форме	229
6.2.4.	Сингулярные характеристики для универсальной поверхности	230
6.2.5.	Приложения к задаче управления	231
6.2.6.	Пример	234
6.3.	Второй порядок сингулярности	237
6.3.1.	Два оптимальных фазовых портрета. Условие Коппа – Мойера	237
6.3.2.	Инвариантная форма условий второго порядка	239
6.3.3.	Сингулярные характеристики для синтеза S_2	240
Упражнения		242
ГЛАВА 7. Ударные волны в решениях УЧП первого порядка		243
7.1.	Сингулярные характеристики в задачах на плоскости	243
7.1.1.	Двумерная задача	243
7.1.2.	Уравнения для фокальной линии	244
7.1.3.	Уравнения для эквивокальной линии	246
7.1.4.	Сингулярные характеристики двумерного уравнения Гамильтона – Якоби	247
7.2.	Ударные волны, порожденные граничными условиями	250
7.2.1.	Начальные условия	250
7.2.2.	Овыпукление функции $g(p)$	251
7.2.3.	Исследование второй производной	256

7.3.	Основные результаты для количества волн	258
7.3.1.	Упрощенные выражения скобок Якоби	258
7.3.2.	Случай простых отрезков	259
7.3.3.	Вторичные волны	264
7.3.4.	Решение в случае непростого отрезка	265
7.3.5.	Теорема С.Н. Кружкова	267
7.3.6.	Пример	268
7.3.7.	Некоторые обобщения на многомерный случай	269
7.4.	Другие приложения метода сингулярных характеристик	271
7.4.1.	Сингулярные характеристики в законах сохранения	271
7.4.2.	Об одном классе систем уравнений в частных производных первого порядка	272
Упражнения	275
ГЛАВА 8. Сингулярные поверхности негладких решений вариационных задач с функционалом, задаваемым многомерным интегралом	277
8.1.	Задача вариационного исчисления с многомерным интегралом	277
8.1.1.	Негладкое решение УЧП второго порядка	277
8.1.2.	Формула первой вариации	278
8.1.3.	Необходимые условия для сингулярной поверхности	281
8.2.	Построение сингулярной поверхности	285
8.2.1.	Уравнения сингулярных характеристик	285
8.2.2.	Начальные условия	286
8.3.	Квадратичный лагранжиан	289
8.3.1.	Вырожденные необходимые условия	289
8.3.2.	Сингулярные характеристики	290
8.3.3.	Возмущенная задача	293
8.3.4.	Начальные условия	294
8.4.	Пример	295
8.4.1.	Постановка задачи	295
8.4.2.	Разложения Тейлора	297
8.4.3.	Частные случаи	299
Упражнения	301
Приложение	303
1.	Теорема о неявной функции	303
2.	Скобки Якоби	304
3.	Инвариантность скобок Якоби	305
4.	Выпрямление поля	308
5.	Преобразование к простой задаче	310
Литература	312
Сокращения	318
Предметный указатель	319

ДОБАВЛЕНИЕ

Избранные статьи	323
Некоторые свойства уравнения Беллмана – Айзекса для игр на поверхностях вращения	325
1. Уравнение Гамильтона – Якоби – Беллмана – Айзекса для игры сближения-уклонения	325
2. Игры на поверхностях вращения	326
3. Игра на конусе	327
4. Игра на гиперboloиде	328
5. Геометрические свойства многообразия B	329
6. Фокальная точка	329
7. Край многообразия B	331
8. Вычисление C	332
9. Структура цены игры	333
Литература	333
Геометрия оптимальных траекторий в окрестности фокальных особых поверхностей в дифференциальных играх	335
1. Введение	335
2. Общее описание фокальной поверхности	336
3. Сингулярная поверхность — гиперплоскость	337
4. Поверхность в общем случае. Коллинеарные поля	340
5. Система двух УЧП для фокального многообразия в общем случае	342
6. Импульсная дифференциальная игра, возникающая в области финансов	345
6.1. Предшествующая работа	345
6.2. Применение теории предыдущего раздела	346
6.3. Эквивалентное скалярное УЧП второго порядка	347
7. 3D-дифференциальная игра с гладким гамильтонианом	348
Литература	349
Задачи с начальными и терминальными условиями для уравнения Гамильтона – Якоби	351
1. Введение	351
2. Вязкостные решения и краевые условия	352
3. Задачи с начальными и терминальными значениями в оптимальном управлении	353
3.1. Нестационарная система и задача вариационного исчисления	354
3.2. Стационарная система и задача вариационного исчисления	355
3.3. Задача вариационного исчисления с однородным лагранжианом	356
3.4. Замечание по терминологии	358
4. Примеры	359
4.1. Управление автомобилем	359
4.2. Двумерная дифференциальная игра	361
4.3. Скалярное уравнение эйконала	366
5. Заключение	367
Литература	367

Геометрия игр преследования-убегания на двумерных многообразиях	369
1. Введение	370
2. Пространство игры и динамика	371
3. Первичное решение	372
4. Неединственность геодезических. Многообразия Γ и B	373
5. Примеры многообразий Γ и B	375
6. Вторичная область. Экивокальные поверхности	384
7. Подобласть произвольного управления убегающего	386
8. Выводы	389
Литература	390
Простейшие особенности и обобщенные характеристики для уравнения Гамильтона – Якоби с гамильтонианом в виде максимума вогнутых функций	393
1. Введение	393
2. Простейшие особенности и сингулярные характеристики	395
2.1. Предположения о сингулярностях коразмерности 1	395
2.2. Классические характеристики	396
2.2.1. Свойство n -монотонности функций H_i	398
2.2.2. Условие равномерной n -монотонности	399
2.3. Метод сингулярных характеристик	399
2.3.1. Условия продолжения	401
3. Возможные типы сингулярностей	402
3.1. Восходящие сингулярности	403
3.1.1. Восходящая рассеивающая поверхность	404
3.1.2. Восходящая экивокальная поверхность	404
3.1.3. Восходящая фокальная поверхность	407
3.2. Нисходящие сингулярности	407
3.2.1. Нисходящая рассеивающая поверхность	408
3.2.2. Нисходящая экивокальная поверхность	409
3.2.3. Нисходящая фокальная поверхность	410
3.3. Неособые поверхности переключения	410
3.3.1. Неособая рассеивающая поверхность	411
3.3.2. Неособая экивокальная поверхность	411
3.3.3. Универсальная поверхность	411
4. Пример	413
4.1. Универсальная поверхность	414
4.2. Неособая экивокальная поверхность	415
4.3. Восходящая экивокальная поверхность	415
Литература	417
Краевые сингулярности и характеристики уравнения Гамильтона – Якоби	419
1. Введение	419
1.1. Классические характеристики	420
1.2. Начальная полоса	420
1.3. Условие регулярности	421

2.	Нерегулярная задача и граничные условия на M	422
2.1.	Начальная полоса для нерегулярной нехарактеристической задачи	423
3.	Метод сингулярных характеристик	424
3.1.	Эквивокальные сингулярные характеристики в дифференциальных играх	425
3.2.	Граничные сингулярные характеристики	427
3.3.	Сингулярность более высокого порядка	428
4.	Сравнение граничных условий на M и M_0^+	428
5.	Достаточные условия существования и единственности	430
5.1.	Формулировка простой задачи	431
5.2.	Формулировка теоремы	432
6.	Примеры	433
6.1.	Одномерный иллюстративный пример	433
6.2.	Дифференциальная игра с фазовыми ограничениями	434
6.3.	Граничные характеристики в игровой задаче о брахистохроне	437
7.	Выводы	440
	Литература	440
Универсальные поверхности и гладкие решения уравнений Беллмана		443
1.	Введение	443
2.	Гладкая функция Беллмана в окрестности универсальной поверхности	444
3.	Достаточные условия существования универсальной поверхности	447
	Литература	449