

*Г.З. Шарафутдинов*

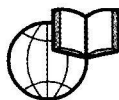
**НЕКОТОРЫЕ  
ПЛОСКИЕ ЗАДАЧИ  
ТЕОРИИ  
УПРУГОСТИ**



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА  
НИИ МЕХАНИКИ МГУ

**Г. З. Шарафутдинов**

# **НЕКОТОРЫЕ ПЛОСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**



МОСКВА  
НАУЧНЫЙ МИР  
2014

УДК 539.3  
ББК 22.251  
Ш25

**Шарафутдинов Г.З.**

**Некоторые плоские задачи теории упругости.** — М.: Научный мир, 2014. — 464 с.: илл.

ISBN 978-5-91522-387-4

В монографии рассматриваются некоторые основные положения и задачи линейной и нелинейной теории упругости. Приводится ряд новых результатов: разработка матричного подхода к определению конечных и больших деформаций и на его основе – способа суммирования деформаций; модификация принципа напряжений Коши; введение дополнительно к двум постоянным Ламе третьей упругой постоянной и некоторые другие.

При решении задач большое внимание уделяется применению методов теории функции комплексного переменного. Задачи о плоской деформации рассматриваются в классической постановке; приводятся решения ряда задач. Задачи о плоском напряженном состоянии рассматриваются также и в пространственной постановке, базирующейся на применении введенного дополнительно к двум потенциалам Колосова–Мусхелишвили третьего комплексного потенциала. Его использование дает возможность получить в ряде случаев точные аналитические решения задач о плоском напряженном состоянии. Приводятся новые решения задач этого класса, например, задачи Кирша, а также решения некоторых задач теории упругости неоднородных тел, задач теории упругости при наличии массовых сил, в том числе – задачи о метеорите и задач теории упругости при конечных и больших деформациях.

Монография предназначена для студентов, аспирантов, преподавателей университетов и вузов, инженеров и исследователей, работающих в области механики деформируемого твердого тела.

*Рецензенты:*

*Р.А. Васин, профессор, доктор физико-математических наук,  
А.М. Локощенко, профессор, доктор физико-математических наук*

ISBN 978-5-91522-387-4

©Шарафутдинов Г.З., 2014  
©Научный мир, 2014

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	9
Введение . . . . .	11

## I. ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ

Глава 1. <b>Перемещения и деформации</b> . . . . .	17
1.1. Кинематика процесса деформирования . . . . .	17
1.2. Деформации . . . . .	22
1.2.1. Мера деформации (22). 1.2.2. Тензор деформаций (24).	
1.3. Применение теории матриц при определении тензора деформаций . . . . .	35
1.3.1. Процесс деформирования с точки зрения теории операторов (36). 1.3.2. Оператор растяжения (деформации) (38). 1.3.3. Деформация окрестности точки (46). 1.3.4. Определение тензора деформации (55). 1.3.5. Перемещения в деформируемых телах (65).	
Глава 2. <b>Напряжения в деформируемых телах</b> . . . . .	73
2.1. Внутренние и внешние силы. Напряжения . . . . .	73
2.2. Принцип напряжений Коши . . . . .	77
2.3. Уравнения движения . . . . .	82
2.4. Условные и истинные напряжения. Метод геометрической линеаризации . . . . .	85
2.5. Преобразование компонент тензора напряжений при повороте координатных осей . . . . .	89
2.6. Инварианты и главные значения тензора напряжений . . . . .	90
Глава 3. <b>Соотношения связи между напряжениями и деформациями в теории упругости</b> . . . . .	94
3.1. Об определяющих соотношениях теории упругости . . . . .	94
3.2. Формулировка соотношений связи между напряжениями и деформациями при помощи формулы Тейлора . . . . .	95
3.3. Операторная форма определяющих соотношений. Закон Гука . . . . .	97
3.4. Постоянные Ламе и их интерпретация . . . . .	106
3.5. Определяющие соотношения нелинейной теории упругости . . . . .	109
Глава 4. <b>Основные уравнения и задачи теории упругости</b> . . . . .	115
4.1. Основные уравнения теории упругости . . . . .	115
4.2. Краевые задачи теории упругости . . . . .	118

- 4.3. Основные соотношения теории упругости в цилиндрической системе координат . . . . . 122
- 4.4. О плоских задачах теории упругости . . . . . 124
- 4.4.1. Плоское деформированное состояние (плоская деформация) (126). 4.4.2. Плоское и обобщенное плоское напряженное состояние (127).

## II. ПЛОСКОЕ ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ

- Глава 5. Задачи классической теории упругости о плоском деформированном состоянии . . . . . 130**
- 5.1. Плоская и обобщенная плоская деформация . . . . . 130
- 5.2. Компоненты тензоров деформаций и напряжений и основные уравнения в полярных координатах . . . . . 134
- 5.3. Теорема Мориса Леви . . . . . 135
- 5.4. Функция напряжений в задачах о плоской деформации . . 136
- Глава 6. Некоторые методы решения задач о плоской деформации . . . . . 141**
- 6.1. Решение задач о плоской деформации с использованием заданной функции напряжений . . . . . 141
- 6.2. Решение задач о плоской деформации при помощи рядов Фурье . . . . . 146
- 6.3. Решение задач о плоской деформации по методу Лява . . 148
- 6.3.1. Метод Лява (148). 6.3.2. Сосредоточенная сила в бесконечной плоскости (152).
- Глава 7. Функции комплексного переменного в плоских задачах теории упругости . . . . . 154**
- 7.1. Комплексные потенциалы Колосова–Мусхелишвили . . . . 154
- 7.2. Альтернативные методы введения комплексных потенциалов . . . . . 159
- 7.2.1. Введение комплексных потенциалов при помощи уравнений Ламе (160). 7.2.2. Введение комплексных потенциалов при помощи уравнений равновесия (163).
- 7.3. Об определенности комплексных потенциалов . . . . . 165
- Глава 8. Использование функций комплексного переменного при решении задач о плоской деформации . . . . . 171**
- 8.1. Приведение задач о плоской деформации к задачам теории функций комплексного переменного . . . . . 171
- 8.1.1. Конечная односвязная область, ограниченная простым замкнутым контуром (172). 8.1.2. Бесконечная область, ограниченная простым замкнутым контуром (174).

8.1.3. О постановке задач о плоской деформации в много- связных областях (176). 8.1.4. Дополнения (177).	
8.2. Конформное отображение и его применение в задачах теории упругости . . . . .	178
8.2.1. Конформное отображение (178). 8.2.2. Преобразо- вание основных формул в плоских задачах теории упру- гости при конформном отображении (181). 8.2.3. гранич- ные условия в преобразованной области (183).	
8.3. Решение плоских задач теории упругости при помощи степенных рядов . . . . .	183
8.3.1. О рядах Фурье в комплексной форме (184).	
8.3.2. Первая основная задача для круга (186).	
8.3.3. Вторая основная задача для круга (189).	
8.4. Интеграл типа Коши и его применение при решении плос- ких задач теории упругости. . . . .	190
<b>Глава 9. Некоторые задачи о плоской деформации . . . . .</b>	<b>197</b>
9.1. Диаметральное сжатие круглого цилиндра. . . . .	197
9.1.1. Распределенная нагрузка (197). 9.1.2. Сосредото- ченная нагрузка (201).	
9.2. Одноосное растяжение упругого пространства с круглым цилиндрическим вырезом . . . . .	213
9.3. Одноосное растяжение упругого пространства с эллипти- ческим цилиндрическим вырезом. . . . .	217

### **III. ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ**

<b>Глава 10. Задачи о плоском напряженном состоянии . . . . .</b>	<b>225</b>
10.1. О постановке задач . . . . .	225
10.2. Обобщенное плоское напряженное состояние. Класси- ческий случай . . . . .	228
10.3. Обобщенное плоское напряженное состояние. Альтерна- тивный вариант. . . . .	231
10.4. Задачи о плоском напряженном состоянии в простран- ственной постановке . . . . .	235
10.5. Обобщенная плоская задача теории упругости. . . . .	238
<b>Глава 11. Применение функций комплексного переменного в задачах о плоском напряженном состоянии . . . . .</b>	<b>241</b>
11.1. Комплексные потенциалы Колосова–Мусхелишвили в за- дачах об обобщенном плоском напряженном состоянии . . . . .	241
11.2. Введение комплексных потенциалов при помощи уравне- ний Ламе . . . . .	244

11.3. Комплексные потенциалы в обобщенной плоской задаче теории упругости . . . . .	249
11.3.1. Представление компонент вектора перемещений и тензора напряжений в комплексной форме (249).	
11.3.2. Граничные условия при использовании трех комплексных потенциалов (254).	
11.4. О степени определенности комплексных потенциалов в обобщенной плоской задаче теории упругости. . . . .	258
<b>Глава 12. Решение некоторых задач о плоском напряженном состоянии при помощи степенных рядов . . . . .</b>	<b>266</b>
12.1. Задача Кирша . . . . .	266
12.1.1. Решение задачи с использованием комплексных потенциалов Колосова–Мухелишвили (267). 12.1.2. Решение задачи при помощи трех комплексных потенциалов (269).	
12.2. Одноосное растяжение пластинки с эллиптическим отверстием . . . . .	273
12.3. Решение задачи о диаметральном сжатии диска в пространственной постановке . . . . .	279
<b>Глава 13. Применение интеграла типа Коши при решении задач о плоском напряженном состоянии в пространственной постановке . . . . .</b>	<b>286</b>
13.1. Некоторые особенности применения интеграла типа Коши в задачах о плоском напряженном состоянии в пространственной постановке . . . . .	286
13.2. Одноосное растяжение бесконечной пластинки со свободным круглым отверстием. . . . .	289
13.3. Одноосное растяжение пластинки со свободным эллиптическим отверстием . . . . .	293
13.4. Действие равномерного давления на контур эллиптического отверстия в бесконечной пластинке. . . . .	298
<b>Глава 14. Деформирование тонких кольцевых пластинок . . . . .</b>	<b>302</b>
14.1. Представление компонент вектора перемещений и тензора напряжений в задачах деформирования тонких пластинок при использовании трех комплексных потенциалов . . . . .	303
14.2. Тонкий диск с центральным жестким круглым включением под действием радиальных напряжений . . . . .	305
14.3. Напряжения в кольцевой пластинке, закрепленной по внешнему контуру при перемещении впаиваемого центрального жесткого диска . . . . .	309
14.4. Действие напряжений на внутренний контур кольцевой пластинки, закрепленной по внешнему контуру . . . . .	318

- 14.5. Напряжения в кольцевой пластинке, закрепленной по внешнему контуру при заданных радиальных и касательных перемещениях контура внутреннего отверстия . . . . . 322

#### **IV. НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

- Глава 15. **Учет влияния массовых сил в плоских задачах теории упругости** . . . . . 328
- 15.1. Представление компонент вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений при помощи трех комплексных потенциалов при наличии массовых сил. . . . . 328
- 15.2. Применение трех комплексных потенциалов в краевых задачах теории упругости при учете массовых сил. . . . . 335
- 15.3. Исследование напряжений во вращающихся цилиндрах. . . 341
- 15.3.1. Вращение круглого цилиндра (342). 15.3.2. Внецентренное вращение круглого цилиндра (344). 15.3.3. Вращение эллиптического цилиндра (348).
- 15.4. Исследование напряжений в цилиндрах при действии массовых сил в поперечном направлении . . . . . 351
- 15.4.1. Учет действия массовых сил на круглый цилиндр в плоских задачах теории упругости (351). 15.4.2. Напряжения в круглом цилиндре, движущемся в сопротивляющейся среде (задача о метеорите) (353). 15.4.3. Напряжения в круглом цилиндре, лежащем на гладкой поверхности (360).
- Глава 16. **Задачи теории упругости неоднородных тел** . . . . 366
- 16.1. Деформирование толстостенной трубы из неоднородного упругого материала. . . . . 367
- 16.1.1. Задача Ламе для трубы с непрерывной зависимостью упругих постоянных от радиуса (367). 16.1.2. Задача Ламе для составной трубы с неоднородным слоем (370).
- 16.2. Приближенный аналитический метод решения плоских задач теории упругости неоднородных тел. . . . . 374
- 16.2.1. Основные соотношения и постановка задачи (374). 16.2.2. Приближенное решение задачи о плоской деформации (378). 16.2.3. Применение функций комплексного переменного при реализации последовательных приближений (383).
- 16.3. Действие равномерного внутреннего давления на контур круговой цилиндрической полости в неоднородном пространстве . . . . . 392
- 16.4. Одноосное растяжение неоднородного упругого пространства с бесконечной круговой цилиндрической полостью. . . 400



16.4.1. Постановка задачи (400).	16.4.2. Первое приближение и решение соответствующей задачи для однородного тела (402).	16.4.3. Второе приближение (407).	16.4.4. Третье приближение (414).
<b>Глава 17. Задачи нелинейной теории упругости . . . . . 422</b>			
17.1. Физически и геометрически нелинейные теории механики деформируемого твердого тела. Нелинейная теория упругости . . . . .	422		
17.2. Осесимметричная деформация толстостенной трубы из высокоэластичного материала . . . . .	429		
17.2.1. Введение (429).	17.2.2. Основные соотношения (430).	17.2.3. Постановка задачи. Метод геометрической линеаризации (432).	17.2.4. Решение задачи (434).
17.2.5. Напряженно-деформированное состояние и параметры трубы в условиях нелинейного деформирования (439).			
17.3. Одноосное растяжение пластинки с круглым отверстием при конечных деформациях . . . . .	443		
17.3.1. Экспериментальное исследование (443).			
17.3.2. Решение задачи при помощи метода геометрической линеаризации (445).			
17.4. Кручение круглого цилиндра в условиях плоской деформации при конечных и больших деформациях . . . . .	450		
17.4.1. О задаче кручения круглого цилиндра (450).			
17.4.2. Матрица оператора деформации (растяжения) (451).			
17.4.3. Тензор деформаций (452).			
Список литературы . . . . .	459		