

А. А. Боровков

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



Книга — Лауреат  
Премии Правительства  
Российской Федерации

**А. А. Боровков**

# **ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

Рекомендовано Учебно-методическим объединением  
по классическому университетскому образованию  
Министерства образования и науки Российской Федерации  
в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по направлениям подготовки 010100 «Математика»

Издание стереотипное



**URSS**  
МОСКВА

ББК 22.171

**Боровков Александр Алексеевич**

**Теория вероятностей:** Учебное пособие. Изд. стереотип. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2016. — 656 с.

Книга охватывает широкий круг вопросов, начиная с оснований теории вероятностей и заканчивая основными элементами теории случайных процессов. Сюда входят: достаточно полный аппарат современной теории вероятностей; разного рода предельные законы для сумм независимых случайных величин; теоремы о поведении траекторий, порожденных этими суммами, включая относящиеся сюда так называемые факторизационные тождества; теория больших отклонений; элементы теории восстановления и различные ее приложения; цепи Маркова и эргодические теоремы для них; элементы теории информации; теория мартингалов и стохастически рекурсивных последовательностей; основы теории случайных процессов; теоремы об основных свойствах винеровских и пуассоновских процессов; функциональные предельные теоремы; элементы теории марковских, стационарных и гауссовских процессов и др.

Для студентов и аспирантов университетов и вузов, а также для специалистов, желающих изучать теорию вероятностей самостоятельно.

*Третье издание книги «Теория вероятностей» вместе с учебником «Математическая статистика» удостоено «Премии Правительства Российской Федерации в области образования за 2003 год».*

Издательство «Книжный дом «ЛИБРОКОМ»», 117335, Москва, Нахимовский пр-т, 56.  
Формат 70×100/16. Печ. л. 41. Зак. № 757.

Отпечатано в ООО ПК «Зауралье», 640022, Курган, ул. К. Маркса, 106.


ISBN 978-5-397-05170-5

© Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009, 2015

18909 ID 205852



9 785397 051705

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА	
 URSS	E-mail: URSS@URSS.ru
	Каталог изданий в Интернете: <a href="http://URSS.ru">http://URSS.ru</a>
	Тел./факс (многоканальный): + 7 (499) 724 25 45

Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

## **Оглавление**

Предисловие . . . . .	12
Предисловие к третьему и четвертому изданиям . . . . .	14
Введение . . . . .	17
<b>Глава 1. Дискретное пространство элементарных событий . . . . .</b>	<b>21</b>
§ 1. Вероятностное пространство . . . . .	21
§ 2. Классическая схема . . . . .	24
§ 3. Схема Бернулли . . . . .	26
§ 4. Вероятность объединения событий. Примеры . . . . .	29
<b>Глава 2. Произвольное пространство элементарных событий . . . . .</b>	<b>31</b>
§ 1. Аксиомы теории вероятностей. Вероятностное пространство . . . . .	31
§ 2. Свойства вероятности . . . . .	37
§ 3. Условная вероятность. Независимость событий и испытаний . . . . .	39
§ 4. Формула полной вероятности и формула Байеса . . . . .	42
<b>Глава 3. Случайные величины и функции распределения . . . . .</b>	<b>46</b>
§ 1. Определения и примеры . . . . .	46
§ 2. Свойства функций распределения и примеры . . . . .	48
2.1. Основные свойства функций распределения . . . . .	48
2.2. Распределения, наиболее часто встречающиеся в теории и приложениях . . . . .	51
2.3. Три типа распределений . . . . .	53
2.4. Распределение функций от случайных величин . . . . .	56
§ 3. Многомерные случайные величины . . . . .	58
§ 4. Независимость случайных величин и классов событий . . . . .	61
4.1. Независимость случайных величин . . . . .	61
4.2. Независимость классов событий . . . . .	64
4.3. Связь введенных понятий . . . . .	65
§ 5*. О бесконечных последовательностях случайных величин . . . . .	68
§ 6. Интегралы . . . . .	69
6.1. Интеграл по мере . . . . .	69
6.2. Интеграл Стилтеса . . . . .	70
6.3. Интегралы от многомерных случайных величин. Распределение суммы независимых случайных величин . . . . .	72

<b>Глава 4. Числовые характеристики случайных величин . . . . .</b>	<b>77</b>
§ 1. Математическое ожидание . . . . .	77
§ 2. Условные функции распределения и условные математические ожидания . . . . .	80
§ 3. Математические ожидания функций независимых случайных величин . . . .	84
§ 4. Математическое ожидание сумм случайного числа случайных величин . . . .	85
§ 5. Дисперсия . . . . .	93
§ 6. Коэффициент корреляции и другие числовые характеристики . . . . .	94
§ 7. Неравенства . . . . .	96
7.1. Неравенства для моментов . . . . .	96
7.2. Неравенства для вероятностей . . . . .	97
§ 8. Обобщение понятия условного математического ожидания . . . . .	99
8.1. Определение условного математического ожидания (у. м. о) . . . . .	99
8.2. Свойства у. м. о. . . . .	103
§ 9. Условные распределения . . . . .	107
<b>Глава 5. Последовательность независимых испытаний с двумя исходами . . . . .</b>	<b>113</b>
§ 1. Законы больших чисел . . . . .	113
§ 2. Локальная предельная теорема и ее уточнения . . . . .	115
2.1. Локальная предельная теорема . . . . .	115
2.2. Уточнения локальной теоремы . . . . .	117
2.3. Локальная предельная теорема для полиномиальных распределений . . . . .	119
§ 3. Теорема Муавра—Лапласа и ее уточнения . . . . .	119
§ 4. Теорема Пуассона и ее уточнения . . . . .	122
4.1. Оценки близости распределений Пуассона и распределений сумм $S_n$ . . . . .	122
4.2. Схема серий. Теорема Пуассона . . . . .	125
§ 5. Неравенства для вероятностей больших отклонений в схеме Бернулли . . . .	129
<b>Глава 6. О сходимости случайных величин и распределений . . . . .</b>	<b>131</b>
§ 1. Сходимость случайных величин . . . . .	131
1.1. Виды сходимости . . . . .	131
1.2. Теорема непрерывности . . . . .	135
1.3. Равномерная интегрируемость и ее следствия . . . . .	136
§ 2. Сходимость распределений . . . . .	141
§ 3. Условия слабой сходимости . . . . .	147
<b>Глава 7. Характеристические функции . . . . .</b>	<b>151</b>
§ 1. Определение и свойства характеристических функций . . . . .	151
1.1. Свойства характеристических функций . . . . .	152
1.2. Свойства х. ф., связанные со структурой распределения $\xi$ . . . . .	155
§ 2. Формулы обращения . . . . .	157
2.1. Формула обращения для плотностей . . . . .	157
2.2. Формула обращения для распределений . . . . .	159

2.3. Формула обращения в $L_2$ . Класс функций, которые одновременно являются плотностями и х. ф. . . . .	161
§ 3. Теорема непрерывности (сходимости) . . . . .	163
§ 4. Применение характеристических функций для доказательства теоремы Пуассона . . . . .	164
§ 5. Характеристические функции многомерных распределений. Многомерное нормальное распределение . . . . .	167
§ 6. Другие применения х. ф. Свойства гамма-распределения . . . . .	170
6.1. Свойство устойчивости распределений $\Phi_{\alpha, \sigma^2}$ , $K_{\alpha, \sigma}$ . . . . .	170
6.2. Г-распределение и его свойства . . . . .	171
§ 7. Производящие функции. Применение к изучению ветвящегося процесса. Задача о вырождении . . . . .	174
7.1. Производящие функции . . . . .	174
7.2. Простейшие ветвящиеся процессы . . . . .	175
<b>Глава 8. Последовательности независимых     случайных величин. Предельные теоремы . . . . .</b>	<b>179</b>
§ 1. Закон больших чисел . . . . .	179
§ 2. Центральная предельная теорема для одинаково распределенных случайных величин . . . . .	180
§ 3. Закон больших чисел для произвольных независимых случайных величин . . . . .	181
§ 4. Центральная предельная теорема для сумм произвольных независимых случайных величин . . . . .	190
§ 5* Другой подход к доказательству предельных теорем. Оценки погрешности . . . . .	198
§ 6. Закон больших чисел и центральная предельная теорема в многомерном случае . . . . .	202
§ 7. Интегро-локальные и локальные предельные теоремы для сумм одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией . . . . .	204
7.1. Интегро-локальные теоремы . . . . .	205
7.2. Локальные теоремы . . . . .	207
7.3. Доказательство теоремы 7.1 в общем случае . . . . .	210
7.4. Равномерные версии теорем 7.1–7.3 для случайных величин, зависящих от параметра . . . . .	212
§ 8. Сходимость к другим предельным законам . . . . .	214
8.1. Интегральная теорема . . . . .	217
8.2. Интегро-локальные и локальные теоремы . . . . .	220
8.3. Пример . . . . .	222
<b>Глава 9. Вероятности больших отклонений сумм независимых случайных величин . . . . .</b>	<b>224</b>
§ 1. Преобразования Лапласа и Крамера. Функция отклонений . . . . .	225
1.1. Условие Крамера. Преобразования Лапласа и Крамера . . . . .	225
1.2. Функция отклонений . . . . .	227



§ 2. Связь вероятностей больших уклонений для сумм случайных величин и для сумм преобразований Крамера над ними. Вероятностный смысл функции уклонений . . . . .	233
2.1. Связь вероятностей больших уклонений для сумм случайных величин и для сумм преобразований Крамера над ними . . . . .	233
2.2. Вероятностный смысл функции уклонений . . . . .	234
2.3. Принцип больших уклонений . . . . .	236
§ 3. Интегро-локальные, интегральные и локальные теоремы о вероятностях больших уклонений в крамеровской области . . . . .	238
3.1. Интегро-локальные и интегральные теоремы . . . . .	238
3.2. Локальные теоремы . . . . .	242
§ 4. Интегро-локальные теоремы на границе крамеровской области . . . . .	245
4.1. Введение . . . . .	245
4.2. Вероятности больших уклонений $S_n$ , расположенных в $o(n)$ -окрестности точки $\alpha_+ n$ ; случай $\psi''(\lambda_+) < \infty$ . . . . .	245
4.3. Класс распределений $\mathcal{ER}$ . Вероятность больших уклонений $S_n$ в $o(n)$ -окрестности точки $\alpha_+ n$ для распределений $\mathbf{F}$ из класса $\mathcal{ER}$ в случае $\psi''(\lambda_+) = \infty$ . . . . .	246
4.4. О вероятностях больших уклонений в области $\alpha > \alpha_+$ для распределений из класса $\mathcal{ER}$ . . . . .	249
§ 5. Интегральные и интегро-локальные теоремы о вероятностях больших уклонений сумм $S_n$ , когда условие Крамера не выполнено . . . . .	250
5.1. Интегральные теоремы . . . . .	250
5.2. Интегро-локальные теоремы . . . . .	251
§ 6. Интегро-локальные теоремы о вероятностях больших уклонений $S_n$ вне крамеровской зоны (при выполненном условии Крамера) . . . . .	254
<b>Глава 10. Процессы восстановления . . . . .</b>	<b>256</b>
§ 1. Процессы восстановления, функции восстановления . . . . .	256
1.1. Введение . . . . .	256
1.2. Интегральная теорема восстановления для разнораспределенных слагаемых . . . . .	258
§ 2. Основная теорема восстановления в арифметическом случае . . . . .	263
§ 3. Эксцесс и дефект случайного блуждания. Предельное распределение в арифметическом случае . . . . .	268
§ 4. Теорема восстановления и предельное распределение эксцесса и дефекта в неарифметическом случае . . . . .	270
§ 5. Закон больших чисел и центральная предельная теорема для процесса восстановления . . . . .	276
5.1. Закон больших чисел . . . . .	276
5.2. Центральная предельная теорема . . . . .	276
5.3. Теорема о конечности нижней грани последовательных сумм . . . . .	278
5.4. Стохастические неравенства. Закон больших чисел и центральная предельная теорема для максимума сумм разнозначных разнораспределенных случайных величин . . . . .	279

5.5. Распространение теорем 5.1, 5.2 на разнозначные случайные величины . . . . .	282
5.6. Локальная предельная теорема . . . . .	283
§ 6. Обобщенные процессы восстановления . . . . .	284
6.1. Определение и некоторые свойства . . . . .	284
6.2. Центральная предельная теорема . . . . .	285
6.3. Интегро-локальная теорема . . . . .	288
<b>Глава 11. Свойства траекторий случайных блужданий. Законы нуля и единицы . . . . .</b>	<b>290</b>
§ 1. Законы нуля и единицы. Верхние и нижние функции . . . . .	290
1.1. Законы нуля и единицы . . . . .	290
1.2. Верхняя и нижняя функции . . . . .	293
§ 2. Сходимость рядов независимых случайных величин . . . . .	294
§ 3. Усиленный закон больших чисел . . . . .	297
§ 4. Усиленный закон больших чисел для произвольных независимых слагаемых . . . . .	300
§ 5. Усиленный закон больших чисел для обобщенных процессов восстановления . . . . .	304
5.1. Усиленный закон больших чисел для процессов восстановления . . . . .	304
5.2. Усиленный закон больших чисел для обобщенных процессов восстановления . . . . .	305
<b>Глава 12. Случайные блуждания и факторизационные тождества . . . . .</b>	<b>306</b>
§ 1. Факторизационные тождества . . . . .	306
1.1. Факторизация . . . . .	306
1.2. Каноническая факторизация функции $f_z(\lambda) = 1 - z\varphi(\lambda)$ . . . . .	307
1.3. Второе факторизационное тождество . . . . .	308
§ 2. Некоторые следствия теорем 1.1–1.3 . . . . .	312
2.1. Прямые следствия . . . . .	312
2.2. Обобщение усиленного закона больших чисел . . . . .	315
§ 3. Тождество Поллачека—Спитцера. Тождество для величины $S = \sup_{k \geq 0} S_k$ . . . . .	316
3.1. Тождество Поллачека—Спитцера . . . . .	317
3.2. Тождество для величин $S = \sup_{k \geq 0} S_k$ . . . . .	318
§ 4. Распределение $S$ в задачах страхования и систем обслуживания . . . . .	320
4.1. Случайные блуждания, возникающие в задачах страхования . . . . .	320
4.2. Системы обслуживания . . . . .	320
4.3. Стохастические модели с непрерывным временем . . . . .	322
§ 5. Случаи, когда компоненты факторизации могут быть найжены в явном виде. Нерешетчатый случай . . . . .	322
5.1. Предварительные замечания о единственности факторизации . . . . .	323
5.2. Классы распределений на положительной полуоси, имеющие рациональные х. ф. . . . .	325
5.3. Явная каноническая факторизация функции $v(\lambda)$ в случае, когда правый хвост распределения $F$ есть экспоненциальный полином . . . . .	326



5.4. Явная факторизация функции $v(\lambda)$ , когда левый хвост распределения $\mathbf{F}$ есть экспоненциальный полином . . . . .	332
5.5. Явная каноническая факторизация функции $v^0(\lambda)$ . . . . .	333
§ 6. Факторизация в явном виде в арифметическом случае . . . . .	335
6.1. Предварительные замечания о единственности факторизации . . . . .	335
6.2. Классы распределений на положительной полуоси, имеющие рациональные производящие функции . . . . .	337
6.3. Явная каноническая факторизация функции $v(z)$ в случае, когда правый хвост распределения $\mathbf{F}$ является экспоненциальным полиномом . . . . .	338
6.4. Явная каноническая факторизация функции $v(z)$ , когда левый хвост распределения $\mathbf{F}$ является экспоненциальным полиномом . . . . .	340
6.5. Явная факторизация функции $v^0(z)$ . . . . .	341
§ 7. Асимптотические свойства распределений $\chi_{\pm}, S$ . . . . .	343
7.1. Асимптотика $P(\chi_+ > x \mid \eta_+ < \infty)$ , $P(\chi_-^0 < -x)$ в случае $E\xi \leq 0$ . . . . .	343
7.2. Асимптотика $P(S > x)$ . . . . .	346
7.3. Распределение максимальных значений обобщенных процессов восстановления . . . . .	350
§ 8. О распределении времен первого прохождения . . . . .	350
8.1. Свойства распределений времен $\eta_{\pm}$ . . . . .	350
8.2. Распределение времени первого прохождения произвольного уровня $x$ для арифметических блужданий, непрерывных сверху . . . . .	353
<b>Глава 13. Последовательности зависимых испытаний. Цепи Маркова . . . . .</b>	<b>357</b>
§ 1. Счетные цепи Маркова. Определения и примеры. Классификация состояний . . . . .	357
1.1. Определения и примеры . . . . .	357
1.2. Классификация состояний . . . . .	359
§ 2. Необходимые и достаточные условия возвратности состояний. Теорема об однотипности состояний неразложимой цепи, структура цепи в периодическом случае . . . . .	361
§ 3. Теоремы о случайных блужданиях на решетке . . . . .	365
3.1. Случайное блуждание по целым точкам на прямой . . . . .	365
3.2. Симметричные случайные блуждания в $\mathbb{R}^k$ , $k \geq 2$ . . . . .	366
3.3. Произвольное симметричное случайное блуждание на прямой . . . . .	367
§ 4. Предельные теоремы для счетных однородных цепей . . . . .	369
4.1. Эргодические теоремы . . . . .	369
4.2. Закон больших чисел и центральная предельная теорема для числа попаданий в заданное состояние . . . . .	377
§ 5*. Поведение переходных вероятностей для разложимых цепей . . . . .	377
§ 6. Цепи Маркова с произвольным множеством состояний. Эргодичность цепей, имеющих положительный атом . . . . .	379
6.1. Цепи Маркова с произвольным множеством состояний . . . . .	379
6.2. Цепи Маркова, имеющие положительный атом . . . . .	384

§ 7*. Эргодичность харрисовых цепей Маркова . . . . .	386
7.1. Эргодическая теорема . . . . .	386
7.2. Об условиях (I), (II) . . . . .	391
§ 8. Законы больших чисел и центральная предельная теорема для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова . . . . .	398
8.1. Случайные величины на цепи Маркова . . . . .	398
8.2. Законы больших чисел . . . . .	399
8.3. Центральная предельная теорема . . . . .	403
<b>Глава 14. Информация и энтропия . . . . .</b>	<b>407</b>
§ 1. Определения, свойства информации и энтропии . . . . .	407
§ 2. Энтропия конечной цепи Маркова. Теорема об асимптотическом поведении информации длинного сообщения, ее приложения . . . . .	411
2.1. Энтропия последовательности испытаний, связанных в стационарную цепь Маркова . . . . .	411
2.2. Закон больших чисел для количества информации, содержащейся в сообщении . . . . .	412
2.3. Асимптотическое поведение числа наиболее вероятных исходов в последовательности испытаний . . . . .	413
<b>Глава 15. Мартингалы . . . . .</b>	<b>416</b>
§ 1. Определения, простейшие свойства, примеры . . . . .	416
§ 2. О сохранении свойства быть мартингалом при замене времени на случайное. Тождество Вальда . . . . .	420
§ 3. Неравенства . . . . .	434
3.1. Неравенства для мартингалов . . . . .	434
3.2. Неравенство для числа пересечений полосы . . . . .	437
§ 4. Теоремы сходимости . . . . .	439
§ 5. Ограниченность моментов стохастических последовательностей . . . . .	443
<b>Глава 16. Стационарные (в узком смысле) последовательности . . . . .</b>	<b>448</b>
§ 1. Основные понятия . . . . .	448
§ 2. Свойства эргодичности (метрической транзитивности), перемешивания и слабой зависимости . . . . .	452
§ 3. Эргодическая теорема . . . . .	456
<b>Глава 17. Стохастически рекурсивные последовательности . . . . .</b>	<b>460</b>
§ 1. Основные понятия . . . . .	460
§ 2. Эргодичность при наличии обновляющих событий. Условия ограниченности . . . . .	461
2.1. Эргодичность с. р. п. . . . .	461
2.2. Ограниченность случайных последовательностей . . . . .	466
§ 3. Условия эргодичности, связанные с монотонностью $f$ . . . . .	468
§ 4. Условия эргодичности для сжимающих в среднем преобразований, удовлетворяющих условию Липшица . . . . .	470

<b>Глава 18. Случайные процессы с непрерывным временем</b> . . . . .	<b>477</b>
§ 1. Общие определения . . . . .	477
§ 2. Условия регулярности процессов . . . . .	481
<b>Глава 19. Процессы с независимыми приращениями</b> . . . . .	<b>487</b>
§ 1. Общие свойства . . . . .	487
§ 2. Винеровские процессы, свойства траекторий и времени первого прохождения уровня . . . . .	490
§ 3. Законы повторного логарифма . . . . .	492
§ 4. Пуассоновские процессы . . . . .	496
§ 5. Описание распределений всего класса процессов с независимыми приращениями . . . . .	499
<b>Глава 20. Функциональные предельные теоремы</b> . . . . .	<b>504</b>
§ 1. Сходимость к винеровскому процессу (принцип инвариантности) . . . . .	504
§ 2. Закон повторного логарифма . . . . .	512
§ 3. Сходимость к пуассоновскому процессу . . . . .	516
3.1. Сходимость процессов накопленных сумм . . . . .	516
3.2. Сходимость сумм редуцирующих процессов восстановления . . . . .	519
<b>Глава 21. Марковские процессы и некоторые их обобщения</b> . . . . .	<b>521</b>
§ 1. Определения и общие свойства марковских процессов . . . . .	521
1.1. Определения и общие свойства . . . . .	521
1.2. Переходная вероятность . . . . .	523
§ 2. Марковские процессы со счетным множеством состояний. Примеры . . . . .	524
2.1. Основные свойства процесса . . . . .	524
2.2. Примеры . . . . .	530
§ 3. Ветвящиеся процессы . . . . .	531
§ 4. Полумарковские процессы . . . . .	533
4.1. Полумарковские процессы на состояниях цепи . . . . .	533
4.2. Эргодическая теорема . . . . .	534
4.3. Полумарковские процессы на переходах цепи . . . . .	537
§ 5. Регенерирующие процессы . . . . .	539
5.1. Регенерирующие процессы. Эргодическая теорема . . . . .	539
5.2. Законы больших чисел и центральная предельная теорема для интегралов от регенерирующих процессов . . . . .	540
§ 6. Диффузионные процессы . . . . .	543
<b>Глава 22. Процессы с конечными моментами     второго порядка, гауссовские процессы</b> . . . . .	<b>549</b>
§ 1. Процессы с конечными моментами второго порядка . . . . .	549
§ 2. Гауссовские процессы . . . . .	552
§ 3. Задача о прогнозе . . . . .	554
<b>Приложение 1. Теорема о продолжении вероятностной меры</b> . . . . .	<b>556</b>
<b>Приложение 2. Теорема Колмогорова о согласованных распределениях</b> . . . . .	<b>561</b>

<b>Приложение 3. Элементы теории меры и интеграла</b> . . . . .	<b>564</b>
§ 1. Пространство с мерой . . . . .	564
§ 2. Интеграл по вероятностной мере . . . . .	565
2.1. Интегралы от простых функций . . . . .	565
2.2. Определение интегралов от произвольных функций . . . . .	566
2.3. Свойства интегралов . . . . .	568
§ 3. Дальнейшие свойства интегралов . . . . .	569
3.1. Теоремы сходимости . . . . .	569
3.2. Связь с интегрированием по мере на прямой . . . . .	570
3.3. Произведения мер и повторные интегралы . . . . .	571
§ 4. Интеграл по произвольной мере . . . . .	574
§ 5. Теорема Лебега о разложении и теорема Радона—Никодима . . . . .	577
§ 6. Слабая сходимость и сходимость по вариации распределений в произвольных пространствах . . . . .	582
6.1. Слабая сходимость . . . . .	582
6.2. Сходимость по вариации . . . . .	585
<b>Приложение 4. Теоремы Хелли и Арцела—Асколи</b> . . . . .	<b>588</b>
<b>Приложение 5. Доказательство теоремы Берри—Эссена</b> . . . . .	<b>591</b>
<b>Приложение 6. Основные свойства правильно меняющихся функций и субэкспоненциальных распределений</b> . . . . .	<b>595</b>
§ 1. Общие свойства правильно меняющихся функций . . . . .	595
§ 2. Основные асимптотические свойства . . . . .	598
§ 3. Асимптотические свойства преобразований над п. м. ф. (теоремы абелева типа) . . . . .	602
§ 4. Субэкспоненциальные распределения и их свойства . . . . .	604
<b>Приложение 7. Доказательство теорем о сходимости к устойчивым законам</b> . . . . .	<b>614</b>
§ 1. Интегральная теорема . . . . .	614
§ 2. Интегро-локальные и локальные теоремы . . . . .	625
<b>Приложение 8. Оценки сверху и снизу для распределений сумм и максимума сумм независимых случайных величин</b> . . . . .	<b>627</b>
§ 1. Оценки сверху при выполнении условия Крамера . . . . .	627
§ 2. Оценки сверху при невыполнении условия Крамера . . . . .	628
§ 3. Оценки снизу . . . . .	636
<b>Приложение 9. Теоремы восстановления</b> . . . . .	<b>638</b>
<b>Литература</b> . . . . .	<b>645</b>
<b>Список основных обозначений</b> . . . . .	<b>647</b>
<b>Предметный указатель</b> . . . . .	<b>649</b>