

Г.В. Мишенков  
Ю.Н. Самогин  
В.П. Чирков

# М Е Т О Д К О Н Е Ч Н Ы Х Э Л Е М Е Н Т О В

В КУРСЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ



**Г.В. Мишенков  
Ю.Н. Самогин  
В.П. Чирков**

**М Е Т О Д  
К О Н Е Ч Н Ы Х  
Э Л Е М Е Н Т О В  
В КУРСЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ**

Под редакцией В.П. Чиркова

*Допущено Министерством образования и науки  
Российской Федерации в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных заведений,  
изучающих дисциплины  
«Сопротивление материалов»,  
«Механика материалов и конструкций»*



**МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2015**

УДК 539.3  
ББК 30.121, 22.2  
М 71

Мишенков Г.В., Самогин Ю.Н., Чирков В.П. **Метод конечных элементов в курсе сопротивления материалов** / Под ред. проф. В.П. Чиркова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. — 472 с. — ISBN 978-5-9221-1615-2.

Содержание учебного пособия соответствует программе подготовки специалистов по направлению «Прикладная механика». Излагаются следующие главы курса «Сопротивление материалов»: растяжение–сжатие, кручение, изгиб, растяжение–сжатие с кручением, кривой изгиб, кривой изгиб в сочетании с растяжением–сжатием, с растяжением–сжатием и кручением, теория напряженного и деформированного состояний, пластины, толстостенные трубы и тонкостенные оболочки. Каждая глава учебного пособия включает основные положения теории и расчетные формулы. Отличительная особенность пособия — широкое использование метода конечных элементов (МКЭ). Подробно рассмотрены решения на основе МКЭ большого количества задач сопротивления материалов.

Для студентов, изучающих дисциплины «Сопротивление материалов», «Механика материалов и конструкций», а также для инженеров машиностроительных и теплоэнергетических специальностей.

*Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации  
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,  
изучающих дисциплины «Сопротивление материалов», «Механика  
материалов и конструкций»*

Рецензенты:

д.ф.-м.н., проф. *Д. В. Тарлаковский*, Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет) (МАИ);

д.т.н., проф. *А. М. Белостоцкий*, Московский государственный строительный  
университет (МГСУ)

ISBN 978-5-9221-1615-2

© ФИЗМАТЛИТ, 2015

© Г. В. Мишенков, Ю. Н. Самогин,  
В. П. Чирков, 2015

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Список обозначений . . . . .	6
Предисловие . . . . .	9
<b>Глава 1. Теоретические основы сопротивления материалов . . . . .</b>	<b>11</b>
1.1. Предмет курса «Сопротивление материалов» . . . . .	11
1.2. Моделирование объектов . . . . .	12
1.3. Основные гипотезы, допущения и принципы . . . . .	22
1.4. Метод сечений. Понятие о внутренних силовых факторах . . . . .	23
1.5. Понятие о напряжениях. Напряженное состояние в точке . . . . .	47
1.6. Линейное и плоское напряженное состояние . . . . .	53
1.7. Понятие о деформациях. Тензор деформаций . . . . .	62
1.8. Обобщенный и объемный закон Гука . . . . .	66
1.9. Потенциальная энергия упругой деформации . . . . .	69
1.10. Основы теории прочности . . . . .	71
1.11. Теоретические основы метода конечных элементов . . . . .	81
<b>Глава 2. Растяжение–сжатие стержней . . . . .</b>	<b>86</b>
2.1. Внутренние силовые факторы . . . . .	86
2.2. Напряжения при растяжении–сжатии . . . . .	87
2.3. Деформации и перемещения при растяжении–сжатии . . . . .	88
2.4. Потенциальная энергия упругой деформации при растяжении–сжатии . . . . .	90
2.5. Расчеты на прочность . . . . .	90
2.6. Метод конечных элементов в расчетах на растяжение–сжатие . . . . .	91
<b>Глава 3. Изгиб балок . . . . .</b>	<b>132</b>
3.1. Внутренние силовые факторы. Дифференциальные зависимости между внутренними силовыми факторами и внешней нагрузкой . . . . .	132
3.2. Тензор напряжений . . . . .	134
3.3. Перемещения при изгибе. Дифференциальное уравнение упругой линии . . . . .	140
3.4. Потенциальная энергия упругой деформации при поперечном изгибе . . . . .	142
3.5. Расчеты на прочность при изгибе . . . . .	143
3.6. Метод конечных элементов в расчетах на прочность при изгибе . . . . .	146

<b>Глава 4. Кручение стержней</b> . . . . .	187
4.1. Внутренние силовые факторы . . . . .	187
4.2. Тензор напряжений . . . . .	188
4.3. Потенциальная энергия упругой деформации при кручении . . . . .	192
4.4. Расчет цилиндрических винтовых пружин . . . . .	192
4.5. Расчеты на прочность и жесткость при кручении . . . . .	194
4.6. Метод конечных элементов в расчетах на кручение . . . . .	195
<b>Глава 5. Сложные виды нагружения</b> . . . . .	217
5.1. Принцип независимости действия сил и границы его применимости . . . . .	217
5.2. Классификация видов нагружения стержня . . . . .	217
5.3. Сочетание растяжения–сжатия с кручением . . . . .	217
5.4. Косой изгиб . . . . .	231
5.5. Косой изгиб с растяжением–сжатием . . . . .	250
5.6. Общий случай нагружения . . . . .	269
<b>Глава 6. Устойчивость сжатых стержней</b> . . . . .	287
6.1. Основные понятия устойчивости равновесия. Критическая сила . . . . .	287
6.2. Устойчивость шарнирно опертого стержня при сжатии . . . . .	288
6.3. Зависимость критической силы от условий закрепления стержня. Обобщенная формула Эйлера . . . . .	289
6.4. Критические напряжения. Границы применимости формулы Эйлера . . . . .	290
6.5. Расчеты на устойчивость сжатых стержней . . . . .	292
6.6. Метод конечных элементов в расчетах стержней на устойчивость . . . . .	293
<b>Глава 7. Осесимметричный изгиб круговых пластин</b> . . . . .	306
7.1. Система гипотез . . . . .	306
7.2. Деформации и напряжения. Внутренние силовые факторы . . . . .	306
7.3. Уравнения равновесия в усилиях . . . . .	309
7.4. Уравнение равновесия в перемещениях . . . . .	310
7.5. Расчеты на прочность и жесткость . . . . .	312
7.6. Метод конечных элементов в расчетах круговых пластин . . . . .	320
<b>Глава 8. Осесимметричный изгиб оболочек вращения</b> . . . . .	338
8.1. Классификация оболочек. Основные определения . . . . .	338
8.2. Основные гипотезы теории оболочек . . . . .	339
8.3. Безмоментная теория оболочек вращения . . . . .	340
8.4. Моментная теория оболочек. Осесимметричная деформация круговых цилиндрических оболочек . . . . .	376
8.5. Толстостенные оболочки. Осесимметричная деформация цилиндров и дисков . . . . .	402

---

Приложение 1. Сортамент прокатной стали . . . . .	418
Приложение 2. Механические характеристики конструкционных материалов . . . . .	426
Приложение 3. Характеристики выносливости сталей . . . . .	432
Приложение 4. Краткие сведения о матрицах и векторах . . . . .	435
4.1. Матрицы и векторы . . . . .	435
4.2. Равенство матриц и векторов, сложение и умножение на скаляр . . . . .	435
4.3. Умножение вектора на матрицу, матрицу на матрицу . . . . .	436
4.4. Транспонирование матрицы . . . . .	436
4.5. Обратная матрица . . . . .	437
Приложение 5. Геометрические характеристики плоских сечений . . . . .	438
5.1. Площади и статические моменты . . . . .	438
5.2. Моменты инерции сечения . . . . .	439
5.3. Формулы параллельного переноса осей . . . . .	440
5.4. Формулы поворота осей . . . . .	441
5.5. Главные оси и главные моменты инерции . . . . .	442
Приложение 6. Расчетные задания по сопротивлению материалов . . . . .	446
6.1. Расчеты стержневых систем . . . . .	446
6.2. Круговые пластины, оболочки, толстостенные цилиндры . . . . .	461
Список литературы . . . . .	470