

А. Н. ПОЛИЛОВ

# ЭТНОДЫ

ПО МЕХАНИКЕ  
КОМПОЗИТОВ



А. Н. ПОЛИЛОВ

*ЭТЮДЫ*  
ПО МЕХАНИКЕ  
КОМПОЗИТОВ



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2016

УДК 620.1+539.3/.6;  
ББК 22.37+30.3+30.6  
П50

Полилов А. Н. **Этюды по механике композитов.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. — 320 с. — ISBN 978-5-9221-1617-6.

Монография посвящена фундаментальным проблемам механики композитов, построению оригинальных моделей разрушения волокнистых композитов с полимерной матрицей. Название книги отражает доступность изложенного материала для широкого читателя, поэтому иллюстрациями новых подходов к построению критериев прочности служат простые примеры проектного расчета и оптимизации типовых элементов композитных конструкций.

Для научных работников, аспирантов и студентов классических и технических университетов, занимающихся проблемами создания и применения композитных материалов в различных отраслях машиностроения.

## СОДЕРЖАНИЕ

|   |           |
|---|-----------|
| Предисловие . . . . .   | 8         |
| Список принятых обозначений . . . . .   | 10        |
| Введение в мир композитов . . . . .   | 16        |
| <b>1. Этюд о тензорах, законе Гука и числе 21 в теории упругости анизотропного тела . . . . .</b>                 | <b>23</b> |
| 1.1. Обобщенный закон Гука в тензорной и матричной формах . . . . .   | 24        |
| 1.2. Классы упругой симметрии, число независимых упругих констант . . . . .                                       | 27        |
| 1.3. Связь тензорных, матричных и технических модулей упругости . . . . .   | 30        |
| 1.4. Преобразование тензоров и матриц упругих модулей и податливостей при повороте системы координат . . . . .    | 32        |
| Приложение 1 к разделу 1.1 о задачах теории упругости . . . . .   | 34        |
| Приложение 2 к разделу 1.1 о малых и логарифмических деформациях . . . . .  | 35        |
| Приложение 3 к разделу 1.3 о понятии тензора и технической сдвиговой деформации. . . . .                          | 36        |
| <b>2. Этюды об испытаниях на растяжение . . . . .</b>   | <b>39</b> |
| 2.1. Особенности испытаний композитов на растяжение . . . . .   | 39        |
| 2.2. Корректность определения модуля сдвига при растяжении . . . . .  | 40        |
| 2.3. Этюды об ограничениях на коэффициенты Пуассона . . . . .   | 42        |
| Приложение 1 к разделу 2.1 о концентрации напряжений около захватов . . . . .                                     | 44        |
| <b>3. Три секрета прочности волокнистых композитов . . . . .</b>  | <b>50</b> |
| 3.1. Первый секрет — масштабный эффект прочности волокон . . . . .  | 50        |
| 3.2. Второй секрет — остановка трещины поверхностью раздела . . . . .   | 51        |
| 3.3. Третий секрет — статистический характер прочности волокон . . . . .  | 55        |
| Приложение 1 к разделу 3.1 о линейной механике разрушения . . . . .   | 58        |
| Приложение 2 к разделу 3.2 об асимптотическом решении задачи про остановку трещины поверхностью раздела . . . . . | 58        |
| Приложение 3 к разделу 3.2 о роли касательных напряжений . . . . .  | 61        |
| Приложение 4 к разделу 3.2 о рациональных свойствах волокнистых композитов . . . . .                              | 61        |
| Приложение 5 к разделу 3.2 о расщеплении около продольных эллиптических трещин . . . . .                          | 62        |
| Приложение 6 к разделу 3.3 о распределении Вейбулла . . . . .   | 63        |
| <b>4. Четыре этюда о секундомере и методах определения модулей сдвига . . . . .</b>                               | <b>65</b> |
| 4.1. Этюды о перекашивании пластин . . . . .  | 65        |
| 4.2. Этюды о жестком шарнирном четырехзвеннике . . . . .  | 68        |
| 4.3. Этюды об определении двух модулей сдвига с помощью одного секундомера . . . . .                              | 68        |
| 4.4. Этюды о кручении плоских образцов и замечание о кручении квадратной пластины . . . . .                       | 70        |

|   |            |
|---|------------|
| Приложение 1 к разделам 4.3, 4.4 об учете влияния захватов . . . . .  | 72         |
| Приложение 2 к разделам 4.3, 4.4 об уточненной аппроксимации<br>крутильной жесткости . . . . .  | 73         |
| <b>5. Пять этюдных задач о прочности при сжатии . . . . .</b>   | <b>74</b>  |
| 5.1. Этюд об образовании кинка при сжатии . . . . .   | 75         |
| 5.2. Этюдная задача о замедленном разрушении композитов при сжатии<br>в результате внутреннего выпучивания слоев или волокон . . . . .          | 77         |
| 5.3. Энергетическое условие расслоения и этюдная задача о выщелки-<br>вании слоев . . . . .   | 81         |
| 5.4. Задача о множественном расщеплении при сжатии . . . . .  | 86         |
| 5.5. Оценки опасности продольных дефектов при сжатии композитов . .   | 89         |
| Приложение 1 к разделу 5.4 о моделях чередующегося разрушения<br>однаправленных композитов и оценке характерного размера де-<br>фекта . . . . . | 93         |
| Приложение 2 к разделу 5.5 об условиях роста внутренних расслоений  | 98         |
| <b>6. Шесть этюдов об особенностях испытаний композитов на изгиб . . . . .</b>  | <b>103</b> |
| 6.1. Учет «сползания» с опор . . . . .  | 104        |
| 6.2. Изгиб профилированных образцов и сегментов колец. . . . .  | 106        |
| 6.3. Изгиб разномодульных материалов . . . . .  | 109        |
| 6.4. Метод оценки межслойного модуля сдвига по поправке к прогибу . . . . .   | 112        |
| 6.5. Критерий расслоения композитных балок при изгибе . . . . .   | 113        |
| 6.6. Масштабный эффект при изгибе . . . . .   | 116        |
| Приложение 1 к разделу 6.5 о межслойной прочности при циклическом<br>изгибе . . . . .   | 117        |
| Приложение 2 к разделу 6.6 о расслоении при кручении . . . . .  | 118        |
| Приложение 3 к разделу 6.6 о расслоении при изгибе с кручением . .  | 119        |
| <b>7. Семь этюдов о накоплении повреждений . . . . .</b>  | <b>121</b> |
| 7.1. Этюд об уравнении Пэриса для роста усталостной трещины . . . . .   | 122        |
| 7.2. Этюд о параметре поврежденности . . . . .  | 123        |
| 7.3. Этюд о запаздывающем разрушении однонаправленных композитов<br>при растяжении . . . . .  | 125        |
| 7.4. Этюд о кинетике роста повреждений в матрице . . . . .  | 126        |
| 7.5. Этюд о прочности пучка волокон . . . . .   | 128        |
| 7.6. Этюд о возникновении неустойчивого деформирования («шейки»)<br>при пластичности. . . . .   | 129        |
| 7.7. Этюд о третьей стадии ползучести . . . . .   | 131        |
| Приложение 1 к разделу 7.1 о кинетике роста расслоений . . . . .  | 131        |
| Приложение 2 к разделу 7.2 о варианте кинетического уравнения для<br>параметра поврежденности . . . . .   | 132        |
| Приложение 3 к разделам 7.2–7.5 об обобщенной модели накопления<br>повреждений в волокнистом композите . . . . .                                | 134        |
| <b>8. Этюды об эффективных упругих свойствах, послойном методе<br/>и «изотропном» композите . . . . .</b>                                       | <b>137</b> |
| 8.1. Оценки Фойгта и Рейсса для эффективных модулей монослоя. . . . .   | 137        |
| 8.2. Послойный метод расчета слоистых пластин. . . . .  | 139        |
| 8.3. Упрощенный послойный метод . . . . .   | 142        |

|   |            |
|---|------------|
| 8.4. Замечания об упругой «изотропии» волокнистых композитов . . . .  | 144        |
| 8.5. Метод суммирования прочностей и оценка «изотропной» прочности  | 146        |
| <b>9. Этюд о диаграммах Цая для оценки упругих и прочностных свойств композитов . . . . .</b>                                 | <b>150</b> |
| 9.1. Диаграммы для оценки модуля упругости композитов со схемой симметричной укладки волокон в четырех направлениях . . . . . | 150        |
| 9.2. Диаграмма для модуля сдвига . . . . .  | 152        |
| 9.3. Диаграммы для оценки упругих свойств при других схемах армирования . . . . .   | 153        |
| 9.4. Диаграммы для оценки прочностных свойств . . . . .   | 153        |
| <b>10. Этюд о наследственной теории ползучести и дробных производных. . . . .</b>   | <b>155</b> |
| 10.1. Испытания на ползучесть и релаксацию . . . . .  | 156        |
| 10.2. Модели вязкоупругости . . . . .   | 157        |
| 10.3. К понятию дробных производных . . . . .   | 160        |
| 10.4. Подобие изохрон. Кривая мгновенного деформирования . . . . .  | 161        |
| 10.5. Элементы наследственной теории ползучести Больцмана–Вольтерры–Работнова . . . . .                                       | 163        |
| Приложение 1 к разделу 10.5 о наследственности в науке и в жизни  | 165        |
| <b>11. Этюды о динамических испытаниях и пробивании композитных пластин . . . . .</b>   | <b>169</b> |
| 11.1. Методы динамических испытаний композитов . . . . .  | 169        |
| 11.2. Испытания на пробивание . . . . .   | 171        |
| 11.3. Распространение упругих волн . . . . .  | 174        |
| 11.4. Коэффициент динамичности . . . . .  | 175        |
| <b>12. Этюды об эллипсоиде, «диванной подушке» и критериях прочности . . . . .</b>  | <b>177</b> |
| 12.1. Тензорно-полиномиальные критерии прочности и подход Работнова   | 177        |
| 12.2. Критерии прочности, учитывающие направленный характер разрушения волокнистых композитов . . . . .                       | 183        |
| 12.3. Критерии прочности композитных труб . . . . .   | 189        |
| <b>13. Этюды о «китайском фонарике» и о расщеплении звена бамбука</b>   | <b>197</b> |
| 13.1. Множественное расщепление композитных труб при сжатии. . . . .  | 197        |
| 13.2. Условие равнопрочности и рациональное проектирование . . . . .  | 200        |
| 13.3. Вышелкivanje полоски при изгибе . . . . .   | 201        |
| 13.4. Расщепление композитных труб при кручении . . . . .   | 202        |
| 13.5. Бамбук как оптимальный биокомпозит . . . . .  | 205        |
| Приложение 1 к разделу 13.4 о депланации при кручении расщепленной тонкостенной трубы . . . . .                               | 206        |
| <b>14. Этюд об армированном баллоне наименьшего веса . . . . .</b>  | <b>213</b> |
| 14.1. Эффективность композитных баллонов для газового топлива . . . . .   | 213        |
| 14.2. Расчет несущей способности по критериям для пар слоев . . . . .   | 214        |
| 14.3. Рациональное проектирование баллона — нитяная аналогия . . . . .  | 216        |



|   |     |
|---|-----|
| <b>15. Этюд о преимуществах композитного карданного вала</b> . . . . .  | 218 |
| 15.1. Основные требования к валу . . . . .  | 218 |
| 15.2. Пример выбора угла намотки по одному из критериев . . . . .   | 220 |
| 15.3. Примеры приближенного расчета вала . . . . .  | 221 |
| Приложение 1 к разделу 15.1 о форме потери устойчивости тонкостенной трубы при кручении . . . . .   | 222 |
| <b>16. Этюды о намоточном торсионе и других упругих элементах из стеклопластика</b> . . . . .   | 225 |
| 16.1. Торсион из стеклопластика — лучший накопитель упругой энергии . . . . .   | 225 |
| 16.2. Пружины из волнистых листов . . . . .   | 227 |
| 16.3. Вампер из стеклопластика — упругий поглотитель энергии . . . . .  | 229 |
| Приложение 1 к разделу 16.2 о расчете перемещений разрезных и целых колец . . . . .   | 231 |
| <b>17. Этюды о проектном расчете композитных малолистовых рессор</b> . . . . .  | 235 |
| 17.1. Особенности рационального проектирования упругих элементов в виде профилированных балок равного сопротивления . . . . .   | 235 |
| 17.2. Этюд об одной третьей . . . . .   | 238 |
| 17.3. Иллюстрация понятия «равнопрочная» балка . . . . .  | 240 |
| 17.4. Влияние «неидеальных» концов на общие размеры рессор . . . . .  | 240 |
| 17.5. Пять способов повышения долговечности рессоры . . . . .   | 241 |
| Приложение 1 к разделам 17.1, 17.5 об оценке влияния разориентации волокон на жесткость и прочность профилированных композитных элементов . . . . .                                 | 242 |
| <b>18. Этюд об изгибно-крутильной потере устойчивости</b> . . . . .   | 251 |
| 18.1. Упрощенные зависимости модулей от угла армирования . . . . .  | 252 |
| 18.2. Уточненная зависимость модуля сдвига . . . . .  | 254 |
| 18.3. Зависимости эффективных модулей от доли продольных слоев . . . . .  | 255 |
| <b>19. Этюды о механизмах сбрасывания концентрации напряжений: о расщеплении около отверстий, об оставшейся мелкой выточке, о «затуплении» надрезов перед разрушением</b> . . . . . | 257 |
| 19.1. Условия расщепления композитов вблизи отверстий и выточек . . . . .   | 258 |
| 19.2. Модель оставшейся выточки и оценка предельного коэффициента концентрации напряжений в расщепляющихся композитах . . . . .   | 263 |
| 19.3. Введение характерного размера материала для описания масштабного эффекта прочности . . . . .  | 265 |
| 19.4. Модели двухстадийного разрушения растрескивающихся композитов около отверстий или надрезов . . . . .  | 269 |
| 19.5. Влияние отверстий и выточек на прочность псевдопластичных композитов . . . . .  | 273 |
| Приложение 1 к разделу 19.3 о градиентной гипотезе, характерном размере и статистической теории прочности . . . . .   | 276 |
| <b>20. Этюд о заклепках и «гвоздях»</b> . . . . .   | 285 |
| 20.1. Анализ традиционных мест крепления . . . . .  | 285 |
| 20.2. Четыре вида разрушения и устойчивое смятие под заклепкой . . . . .  | 287 |

---

|  |            |
|--|------------|
| 20.3. Рациональное проектирование «равнопрочных» заклепочных соединений . . . . .                    | 290        |
| 20.4. Предельный коэффициент реализации прочности . . . . .  | 291        |
| <b>21. Этюд о структуре сучка . . . . .</b>  | <b>294</b> |
| 21.1. Биомеханические принципы создания равнонапряженных структур армирования . . . . .              | 295        |
| 21.2. Проектирование мест крепления с применением криволинейных траекторий укладки волокон . . . . . | 296        |
| Заключение . . . . .   | 303        |
| Послесловие . . . . .  | 305        |
| Список литературы . . . . .  | 306        |
| Предметный указатель . . . . .   | 311        |
| Авторский указатель . . . . .  | 314        |