

Физико·
Математическое
Наследие

Н. Н. ЛУЗИН

Выдающийся советский математик
Академик АН СССР
Создатель московской
математической школы



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ
ИСЧИСЛЕНИЕ



Математика

Математический анализ



URSS

Физико-математическое наследие: математика
(математический анализ)

Н. Н. Лузин

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для вузов

Издание восьмое



URSS

МОСКВА

ББК 22.1я44 22.1я73 22.161.6

Лузин Николай Николаевич

Дифференциальное исчисление: Учебное пособие. Изд. 8-е.

М.: ЛЕНАНД, 2017. — 480 с. (Физико-математическое наследие: математика (математический анализ).)

Вниманию читателей предлагается классический курс дифференциального исчисления, автор которого — выдающийся советский математик, академик АН СССР Н. Н. Лузин. Этот курс успешно выдержал несколько изданий и стал настольной книгой не одного поколения советских математиков, инженеров и педагогов. В книге рассмотрен широкий круг понятий и определений, относящихся к дифференциальному исчислению, а также даются примеры и задачи, помогающие закрепить усвоенный материал.

Книга рекомендуется математикам и педагогам, научным работникам, преподавателям, аспирантам и студентам естественных, технических и педагогических вузов.

ООО «ЛЕНАНД», 117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 11А, стр. 11.
Формат 60×90/16. Печ. л. 30. Зак. № 3260.

Отпечатано в Акционерном обществе «Рыбинский Дом печати»
152901, г. Рыбинск, ул. Чкалова, 8.

ISBN 978-5-9710-3849-8

© Н. Н. Лузин, 1946, 2016

© ЛЕНАНД, оформление, 2016

6598 ID 220182



НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА	
 URSS	E-mail: URSS@URSS.ru
	Каталог изданий в Интернете: http://URSS.ru
	Тел./факс (многоканальный): + 7 (499) 724 25 45

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I. Число

(1) Рациональные числа. (2) Практическое значение рациональных чисел. (3) Сопоставление рациональных чисел с точками прямой линии. (4) Несоизмеримые отрезки. (5) Иррациональные числа. (6) Иррациональное число есть непериодическая бесконечная десятичная дробь. (7) Действительные числа. (8) Абсолютная величина. (9) Деление на нуль запрещается. 5

Глава II. Величина

(10) О величинах вообще. (11) Переменная величина. (12) Постоянная величина. (13) Геометрическое изображение величин. (14). Область значений переменного. (15) Отрезок и промежуток. (16) Классификация переменных величин. (17) Приращение переменной величины. (18) Постоянная величина как переменная 16

Глава III. Функция

(19) Функция. (20) Зависимые и независимые переменные. (21) Характеристика функции. (22) Вычисление функций. (23) Область изменения аргумента. (24) Приращение функции. (25) Геометрическое изображение функций. (26) Геометрическое изображение приращения функции. (27) О различном происхождении функций. (28) Классификация функций 31

Глава IV. Предел

(29) Предел переменного. (30) О способах переменной величины приближаться к своему пределу. (31) Бесконечно малые. (32) Связь понятия предела и бесконечно малого. (33) Предварительные свойства переменных величин, стремящихся к пределу. (34) Важнейшие свойства бесконечно малых. (35) Основные теоремы о пределах. (36) Понятие о бесконечно большом. (37) Связь бесконечно большого и бесконечно малого 56

Глава V. Непрерывность

(38) Понятие непрерывности функции. (38) Определение непрерывности функции в точке. (40) Геометрическое изображение непрерывности функции в точке. (41) Непрерывность в точке двусторонняя и односторонняя. (42) Важнейшие свойства функций, непрерывных в точке. (43) Правило испытания на непрерывность. (44) Свойства функций, непрерывных на отрезке. (45) Пределы функции и их обозначения. Пределы в бесконечности. (46) Типы разрывов функций. Неустранимый и устранимый разрывы. (47) Кажущийся разрыв и так называемая «истинная величина» функции. Раскрытие неопределенностей. (48) Натуральные логарифмы . . . 77

Глава VI. Дифференцирование

(49) Введение. (50) Приращение. (51) Сравнение приращений. (52) Производная функция одного переменного. (53) Различные обозначения производной. (54) Дифференцируемые функции. (55) Общее правило дифференцирования. (56) Геометрический смысл производной 120

Глава VII. Правила для дифференцирования алгебраических выражений

(57) Важность общего правила. (58) Дифференцирование постоянного. (59) Дифференцирование переменного по этому же самому переменному. (60) Дифференцирование суммы (алгебраической). (61) Дифференцирование произведения постоянного на функцию. (62) Дифференцирование произведения двух функций. (63) Дифференцирование произведения любого заданного конечного числа функций. (64) Дифференцирование функции с постоянным показателем степени. (65) Дифференцирование частного. (66) Дифференцирование функции от функции. (67) Об ошибках, часто случающихся при дифференцировании функции от функции. (68) Практика дифференцирования функции от функции. (69) Дифференцирование обратных функций. (70) Дифференцирование неявных функций 136

Глава VIII. Различные приложения производной

(71) Направление кривой. (72) Уравнения касательной и нормали; длины подкасательной и поднормали. (73) Наибольшая и наименьшая величина функции; введение. (74) Функции возрастающие и убывающие. Их отличительные признаки. (75) Максимальные и минимальные величины функции; их логические определения. (76) Первый способ исследования функции на максимум и минимум. Рабочее правило. (77) Максимальная и минимальная величины непрерывной функции, когда у нее нет производной в некоторых точках. (78) Общие указания для наиболее практического отыскания максимальных и минимальных величин. (79) Производная как быстрота изменения. (80) Скорость прямолинейного движения. (81) Связанные скорости 160

Глава IX. Последовательное дифференцирование и его приложения

(82) Определение последовательных производных. (83) n -я производная. (84) Последовательное дифференцирование неявных функций. (85) Направление изгиба кривой. (86) Второй способ испытания на максимум и минимум. (87) Точки перегиба. (88) Вычерчивание кривых. (89) Ускорение прямолинейного движения 190

Глава X. Дифференцирование трансцендентных функций

(90) Формулы производных; второй основной список. (91) Дифференцирование логарифма. (92) Дифференцирование показательной функции. (93) Дифференцирование общей показательной функции. Доказательство правила степени. (94) Практика дифференцирования логарифмических выражений. (95) Дифференцирование $\sin v$. (96) Дифференцирование $\cos v$. (97) Дифференцирование $\operatorname{tg} v$. (98) Дифференцирование $\operatorname{ctg} v$. (99) Пояснение. (100) Обратные тригонометрические функции. (101) Дифференцирование $\operatorname{arc} \sin v$. (102) Дифференцирование $\operatorname{arc} \cos v$. (103) Дифференцирование $\operatorname{arc} \operatorname{tg} v$. (104) Дифференцирование $\operatorname{arc} \operatorname{ctg} v$ 209

Глава XI. Приложения к параметрическим уравнениям, полярным уравнениям и к корням

(105) Параметрические уравнения кривой. Наклон. (106) Параметрические уравнения. Вторая производная. (107) Криволинейное движение. Скорость. (108) Криволинейное движение. Компоненты ускорения. (109) Полярные координаты. Угол между радиусом-вектором и касательной. (110) Длины полярной подкасательной и полярной поднормали. (111) Отделение кратных корней у многочленов. (112) Действительные корни уравнений. Графические методы. (113) Второй метод отделения действительных корней. (114) Метод Ньютона 237

Глава XII. Дифференциалы

(115) Введение. (116) Определения. (117) Геометрическое изображение дифференциала. (118) Приращение функции и дифференциал функции. (119) О сравнении бесконечно малых друг с другом. (120) Приближенное вычисление приращения функции при помощи дифференциала. (121) Малые ошибки. (122) Формулы для нахождения дифференциалов функций. (123) Дифференциал дуги в прямоугольных декартовых координатах. (124) Дифференциал дуги в полярных координатах. (125) Скорость криволинейного движения как быстрота изменения дуги. (126) Неизменность формулы для дифференциала функции. (127) Дифференциалы высших порядков 268

Глава XIII. Кривизна, радиус и круг кривизны

(128) Кривизна. (129) Кривизна окружности. (130) Кривизна в прямоугольных координатах. (131) Кривизна в параметрической форме. (132) Кривизна в полярных координатах. (133) Радиус кривизны. (134) Рельсовый путь или переходные кривые. (135) Круг кривизны. (136) Центр кривизны. (137) Эволюты. (138) Свойства эволюты. (139) Эвольвенты и их механическое построение. (140) Преобразование производных 292

Глава XIV. Теорема о среднем и ее приложения

(141) Теорема Ролля. (142) Соприкасающийся круг. (143) Предельная точка пересечения двух близких нормалей. (144) Теоремы о среднем (законы среднего). (145) Теорема о среднем Тейлора. (146) Максимум и минимум, исследуемые аналитически. (147) Неопределенные формы. (148) Оценка элементарными приемами функции, принимающей неопределенную форму. (149) Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$. (150) Раскрытие неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$. (151) Раскрытие неопределенности $0 \cdot \infty$. (152) Раскрытие неопределенности $\infty - \infty$. (153) Раскрытие неопределенностей 0^0 , 1^∞ , ∞^0 . (154) Асимптоты. (155) Нахождение асимптот кривой, отнесенной к прямоугольной системе координат. (156) Предельное положение касательной. (157) Нахождение асимптот алгебраических кривых. (158) Асимптоты кривой, отнесенной к полярной системе координат 316

Глава XV. Частные производные

(159) Непрерывные функции двух и более независимых переменных. (160) Частные производные. (161) Геометрическая интерпретация частных производных. (162) Полное приращение. (163) Полный дифференциал. (164) Закон сохранения формулы полного дифференциала при преобразовании независимых переменных. (165) Практическое вычисление полных дифференциалов. (166) Частная производная и полная производная. Дифференцирование вдоль линии. (167) Дифференцирование неявных функций. (168) Производные высшего порядка. (169) Теоремы о среднем для функций нескольких независимых переменных (законы среднего). (170) Необходимые условия максимума и минимума функций нескольких переменных. (171) Достаточные условия максимума и минимума функций двух переменных 355

Глава XVI. Приложение частных производных

(172) Особые точки. (173) Определение касательных в особых точках алгебраической кривой. (174) Различные типы двукратных точек алгебраической кривой. (175) Особые точки трансцендентных кривых. (176) Семейство кривых и их огибающая. (177) Нахождение огибающей семейства кривых, зависящих от одного параметра. (178) Эволюта кривой как огибающая

семейства ее нормалей. (179) Пространственная кривая и ее уравнение. (180) Касательная прямая и нормальная плоскость пространственной кривой. (181) Соприкасающаяся плоскость пространственной кривой. (182) Касательная плоскость и нормаль к поверхности. (183) Геометрическая интерпретация полного дифференциала функции двух аргументов 391

Глава XVII. Основы векторного анализа и его применение в теории пространственных кривых

(184) Вектор-функция скалярного аргумента. Непрерывность. Производная. (185) Правила дифференцирования векторов. (186) Векторно-параметрическое уравнение кривой. (187) Производная радиуса-вектора. Орт касательной. (188) Дифференциал дуги пространственной кривой. (189) Кривизна пространственной кривой. (190) Главная нормаль кривой. (191) Основной трехгранник. (192) Кручение пространственной кривой. Формулы Френе. 429
 Приложение I. Элементарные формулы 455
 Приложение II. Кривые для справок 463