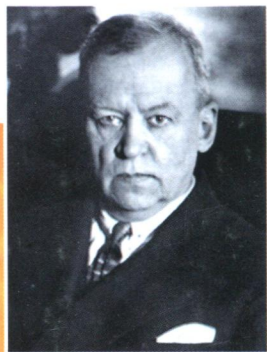


Физико·
Математическое
Наследие

Н. Н. ЛУЗИН

Выдающийся советский математик
Академик АН СССР
Создатель московской
математической школы



ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ



Математика

Математический анализ



Физико-математическое наследие: математика
(*математический анализ*)

Н. Н. Лузин

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для вузов

Издание восьмое



URSS
МОСКВА

ББК 22.1я44 22.1я73 22.161.6

Лузин Николай Николаевич

Интегральное исчисление: Учебное пособие. Изд. 8-е.

М.: ЛЕНАНД, 2017. — 416 с. (Физико-математическое наследие: математика (математический анализ).)

Вниманию читателей предлагается классический курс интегрального исчисления, написанный выдающимся советским математиком, академиком АН СССР Н. Н. Лузиным. Данный курс успешно выдержал несколько изданий и стал настольной книгой не одного поколения советских математиков, инженеров и педагогов. В книге рассмотрен широкий круг понятий и определений, относящихся к интегральному исчислению, а также даются примеры и задачи, помогающие закрепить усвоенный материал.

Книга рекомендуется математикам и педагогам, научным работникам, преподавателям, аспирантам и студентам естественных, технических и педагогических вузов.

ООО «ЛЕНАНД», 117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 11А, стр. 11.
Формат 60×90/16. Печ. л. 26. Зак. № 3259.

Отпечатано в Акционерном обществе «Рыбинский Дом печати».
152901, г. Рыбинск, ул. Чкалова, д. 8.

ISBN 978–5–9710–3850–4

© Н. Н. Лузин, 1946, 2016

© ЛЕНАНД, оформление, 2016

17555 ID 220186



НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА	
	E-mail: URSS@URSS.ru
	Каталог изданий в Интернете: http://URSS.ru
	Тел./факс (многоканальный): + 7 (499) 724 25 45
	URSS

О Г Л А В Л Е Н И Е

Стр.

Глава I. Интегрирование. Правила непосредственного интегрирования

(1) Интегрирование. (2) Многозначность действия интегрирования: прибавочное, произвольное, постоянное. Неопределенный интеграл. (3) Определенный интеграл. (4) Основная теорема интегрального исчисления о вычислении определенного интеграла. (5) Характер основного действия интегрального исчисления. Обозначения определенного и неопределенного интегралов. (6) Взаимная обратность знаков: дифференциала d и неопределенного интеграла \int . (7) О вычисляемости и невычисляемости неопределенных интегралов. (8) Таблица основных интегралов и непосредственное интегрирование. (9) Формулы I, II и III. (10) Формулы IV и V. (11) Формулы VI и VII. (12) Формулы VIII—XV. (13) Формулы XVI—XIX. (14) Формулы XX и XXI. (15) Тригонометрические дифференциалы. (16) Интегрирование выражений, содержащих $\sqrt{a^2 - x^2}$ или $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ при помощи тригонометрических подстановок. (17 а) О множественности ответов при интегрировании. (18) Интегрирование по частям. (19) Пояснение 3

Глава II. Постоянная интегрирования

(20) Определение постоянной интегрирования из начальных условий. (21) Геометрическое значение постоянной интегрирования. (22) Физическое значение постоянной интегрирования 60

Глава III. Определенный интеграл

(23) Понятие определенного интеграла. (24) Теоретическое вычисление определенного интеграла. (25) Фактическое вычисление определенного интеграла. (26) Обозначение определенного интеграла. (27) Основная формула Лейбница — Ньютона и условие ее применимости. (28) Взаимоотношение определенного и неопределенного интегралов. (29) Переменное интегрирования в определенном и в неопределенном интегралах. (30) Перестановка пределов интегрирования. (31) Разбиение отрезка интегрирования. (32) Два простейшие свойства определенных интегралов. (33) Определенное интегрирование по частям. (34) Определенное интегрирование подстановкой. (35) Теорема о среднем. (36) Определенный интеграл как площадь. (37) Площадь кривой, заданной уравнениями в параметрической форме. (38) Задача приближенного интегрирования. (39) Правило трапеций. (40) Правило Симпсона (параболическая формула). (41) Интеграл с бесконечными пределами. (42) Интеграл от функции прерывной (уходящей в бесконечность). 66

Глава IV. Интегрирование как процесс суммирования. Приложения интегрального исчисления

(43) Введение. (44) Общая схема применения интегрального исчисления. (45) Площади плоских кривых в прямоугольных координатах.

	Стр.
(46) Упрощение в выводе формул. (47) Смысл отрицательного знака у площади. (48) Площади плоских кривых в полярных координатах. (49) Объемы тел вращения. (50) Длина кривой. (51) Длина плоской кривой в прямоугольных координатах. (52) Длина плоской кривой в полярных координатах. (53) Поверхность тела вращения. (54) Тела с известными поперечными параллельными сечениями. (55) О применении интегрального исчисления в естествознании. (56) Центр тяжести. (57) Давление жидкости. Работа	95
Глава V. Формальное интегрирование различными приемами	
(58) Введение. (59) Интегрирование рациональных дробей. (60) Интегрирование подстановкой нового переменного; рационализация. (61) Дифференциальный бином. (62) Преобразование тригонометрических дифференциалов. (63) Разные подстановки	140
Глава VI. Ряды	
(64) Бесконечные последовательности. (65) Признаки существования предела последовательности. (66) Ряды. (67) Необходимый признак сходимости. (68) Достаточные признаки сходимости. Сравнение рядов. (69) Признак сходимости Д'Аламбера. (70) Ряды с чередующимися знаками. (71) Абсолютная сходимость. (72) Интегральный признак Коши. (73) Действия над рядами. (74) Остаток ряда. (75) Общий обзор. (76) Ряды функций. (77) Равномерная сходимость. (78) Признак для равномерной сходимости. (79) Свойства равномерно сходящихся рядов. (80) Степенные ряды. (81) Сумма степенного ряда. (82) Дифференцирование и интегрирование степенных рядов. (83) Бесконечный ряд Маклорена. (84) Сопоставление бесконечного ряда Маклорена с конечной формулой Маклорена. (85) Биномиальный ряд. (86) Логарифмические ряды. (87) Разложение аркус-тангенса. (88) Разложение аркус-синуса. (89) Действия над степенными рядами. (90) Ряды Тейлора	157
Глава VII. Комплексные числа, переменные, функции	
(91) Арифметика и алгебра комплексных чисел. (92) Геометрическое изображение комплексных величин. (93) Комплексное переменное. (94) Перенос теории численных рядов на комплексные числа. (95) Понятие функции комплексного переменного. (96) Непрерывность функции комплексного переменного. (97) Производная и монотонность. (98) Сохранение формул дифференциального исчисления. (99) Степенные ряды. (100) Ряд Тейлора и его круг сходимости. (101) Показательные и тригонометрические функции с комплексным переменным. (102) Гиперболические функции	218
Глава VIII. Дифференциальные уравнения	
(103) Дифференциальные уравнения. Их порядок и степень. (104) Решение дифференциальных уравнений. Постоянные интегрирования. (105) Проверка решений дифференциальных уравнений. (106) Дифференциальные уравнения первого порядка и первой степени. (107) Два специальные типа дифференциальных уравнений высшего порядка. (108) Случаи понижения порядка. (109) Форма общего интеграла линейного однородного уравнения второго порядка. (110) Уравнения с правой частью. (111) Метод Лагранжа изменения постоянных. (112) Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. (113) Отыскание решения y^* в общем случае. (114) Приложения к задачам механики. (115) Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами. (116) Метод Лагранжа изменения постоянных	256

Глава IX. Кратные интегралы

(117) Двухмерная интегральная сумма. (118) Геометрический смысл двухмерной интегральной суммы. (119) Двойной (определенный) интеграл. (120) Геометрический смысл двойного интеграла. (121) Вычисление двойного интеграла. Случай прямоугольной области. (122) Вычисление двойного интеграла. Общий случай области, ограниченной криволинейным контуром. (123) Двойной интеграл в полярных координатах. (124) Объем цилиндрического тела. (125) Площади, ограниченные плоскими кривыми. (126) Центр тяжести площади плоской фигуры. (127) Моменты инерции площади плоской фигуры. (128) Общий метод вычисления площади поверхности. (129) Нахождение объемов посредством тройного интегрирования 312

Глава X. Криволинейный интеграл

(130) Обозначение криволинейного интеграла. (131) Происхождение криволинейного интеграла. (132) Вычисление криволинейного интеграла. (133) Случай, когда криволинейный интеграл $\int P dx + Q dy$ не зависит от пути интегрирования, но зависит только от положения конечных точек. (134) Аналитический признак полного дифференциала. (135) Зависимость криволинейного интеграла от пути. Работа силы. (136) Формула Остроградского. (137) Дифференциальное уравнение, левая часть которого есть полный дифференциал. (138) Интегрирующий множитель 351

Глава XI. Ряды Фурье

(139) Тригонометрические ряды. (140) Формулы Фурье. (141) Предварительные леммы. (142) Выражение суммы $n+1$ первых членов ряда Фурье. (143) Сходимость ряда Фурье. (144) Гармонический анализ. (145) О наименьшей средней квадратичной погрешности 379

Глава XII. Метод акад. С. А. Чаплыгина приближенного интегрирования

(146) Дифференциальные неравенства С. А. Чаплыгина. (147) Метод С. А. Чаплыгина. (148) Безграничное приближение. (149) Быстрота сходимости процесса С. А. Чаплыгина 398