

Г. Л. БРОВКО

---

**ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ  
СОТНОШЕНИЯ  
МЕХАНИКИ  
СПЛОШНОЙ  
СРЕДЫ**

Развитие  
математического аппарата  
и основ общей теории

---

НАУКА

Г. Л. БРОВКО

---

**ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ  
СООТНОШЕНИЯ  
МЕХАНИКИ  
СПЛОШНОЙ  
СРЕДЫ**

Развитие  
математического аппарата  
и основ общей теории



МОСКВА НАУКА 2017

УДК 51.517  
ББК 22.25  
Б88

Рецензенты:

доктор физико-математических наук *А.А. Маркин*,  
доктор физико-математических наук *П.В. Трусов*

**Бровко Г. Л.**

Определяющие соотношения механики сплошной среды : Развитие математического аппарата и основ общей теории / Г.Л. Бровко. — М. : Наука, 2017. — 432 с. — ISBN 978-5-02-040054-2 (в пер.).

Книга посвящена развитию математических основ и аппарата общей теории определяющих соотношений классической механики сплошных сред при произвольных деформациях. В ней обобщены достижения современных отечественных и зарубежных исследований и предложены оригинальные результаты по тензорному представлению механических характеристик, выяснению общей математической структуры их связей в определяющих соотношениях, по развитию аксиоматики и основ теории. Разработан математический аппарат объективных тензоров и связывающих их независимых от системы отсчета отображений и уравнений; введено обобщение объективных производных. Построены новые классы тензорных мер напряжений и конечных деформаций, включающие известные меры. Предложен вариант теории определяющих соотношений, согласованный с подходами Ильюшина и Нолла, аксиоматически учитывающий возможное наличие в теле внутренних кинематических связей и полей внутренних массовых сил. Дано обобщение понятий образа процесса и свойств пятимерной изотропии на область конечных деформаций.

Для научных работников и инженеров, студентов и аспирантов университетов и технических вузов по специальности «механика», преподавателей.

ISBN 978-5-02-040054-2

© Бровко Г.Л., 2017  
© ФГУП Издательство «Наука»,  
редакционно-издательское  
оформление, 2017

# Оглавление

<b>Предисловие</b> .....	3
<b>Введение</b> .....	5
§1. Становление теории определяющих соотношений .....	5
§2. Актуальные проблемы теории .....	10
2.1. Тензорные характеристики механических процессов .....	10
2.2. Общая математическая структура отображений в определяющих соотношениях .....	17
2.3. Вопросы аксиоматики. Общие приведенные формы определяющих соотношений .....	22
2.4. Подходы к классификации моделей. Постулат изотропии .....	26
§3. Комментарий к изложению материала .....	32
<b>Часть I. ОСНОВЫ ТЕОРИИ</b> .....	41
<b>Глава 1. ОБЪЕКТИВНЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ ТЕНЗОРНЫЕ ПРОЦЕССЫ</b> .....	43
§1.1. Механические тензорные процессы в деформирующихся телах в различных способах описания .....	43
1.1.1. Движение среды. Способы описания .....	44
1.1.2. Деформации материальных частиц .....	46

1.1.3.	Замена отсчетной конфигурации. Деформации в относительном описании. Наложение деформаций .....	60
1.1.4.	Скорости деформаций. Спин .....	64
1.1.5.	Напряженное состояние среды .....	68
1.1.6.	Другие механические характеристики. Общие уравнения баланса .....	74
1.1.7.	Механические тензорные процессы. Физические тождества и физическая эквивалентность .....	79
§1.2.	Замена системы отсчета и преобразование механических тензорных характеристик .....	81
§1.3.	Объективные тензоры. Типы объективности. Переплетающие операторы и диаграммы .....	89
§1.4.	Объективные тензорные процессы. Истории, предыстории .....	100

## **Глава 2. ОТОБРАЖЕНИЯ ОБЪЕКТИВНЫХ ТЕНЗОРНЫХ ПРОЦЕССОВ .....**

§2.1.	Отображения и уравнения связи объективных тензорных процессов. Независимость отображений и уравнений от системы отсчета .....	112
§2.2.	Критериальные свойства и общие представления независимых от системы отсчета отображений и уравнений связи объективных тензорных процессов ...	117
§2.3.	Примеры независимых от системы отсчета отображений и уравнений .....	123
§2.4.	Переплетения отображений. Отображения диаграмм ..	132
§2.5.	Объективные производные и дифференциальные операторы. Объективное интегрирование .....	139
2.5.1.	Объективные производные .....	139
2.5.2.	Дифференциальные операторы по времени, не зависящие от системы отсчета .....	142
2.5.3.	Объективное интегрирование .....	144

## **Глава 3. ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРИЯ ТЕНЗОРНЫХ МЕР ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ .....**

§3.1.	Основные положения теории .....	146
-------	---------------------------------	-----

§3.2.	Общие подходы к построению тензорных мер деформаций и напряжений. Теорема об энергетической сопряженности .....	149
3.2.1.	Общий лагранжев класс тензорных мер деформаций и напряжений .....	150
3.2.2.	Теорема об энергетической сопряженности. Полный лагранжев класс тензорных мер.....	154
§3.3.	Простой лагранжев класс тензорных мер деформаций и напряжений. Объективные аналоги и сопряженные диаграммы.....	158
§3.4.	Семейство голономных изотропных мер простого лагранжева класса.....	168
§3.5.	Семейство простых лагранжевых коротационных мер..	175
§3.6.	Сравнительные характеристики тензорных мер простого лагранжева класса .....	178
3.6.1.	Сравнительные характеристики голономных лагранжевых мер .....	178
3.6.2.	Сравнение коротационных мер .....	180
§3.7.	Некоторые общие замечания о введенных множествах мер .....	186

## **Глава 4. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ. ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ..... 189**

§4.1.	Сопrotивление деформированию: основные понятия и принципы общей теории .....	189
4.1.1.	Законы баланса для произвольных движений. Замечания о массовых силах .....	190
4.1.2.	Динамические процессы. Понятие свойств и определяющих соотношений сопротивления тел деформированию .....	197
4.1.3.	Основные аксиомы (принципы) общей теории определяющих соотношений сопротивления деформированию .....	204
§4.2.	Общие приведенные формы определяющих соотношений .....	208
4.2.1.	Внутренние кинематические связи .....	208
4.2.2.	Произвольные поля внутренних силовых взаимодействий .....	216

4.2.3.	Оператор напряжений: главное представление. Локализованность напряжений и слабая локализованность кинематических связей .....	220
4.2.4.	Общая приведенная форма оператора напряжений .....	228
4.2.5.	Общая приведенная форма оператора внутренних массовых сил .....	236
4.2.6.	Сводный результат .....	239
§4.3.	Эквивалентные представления определяющих соотношений .....	242
4.3.1.	Общие приведенные формы определяющих соотношений для различных динамических процессов .....	242
4.3.2.	Простые тела. Эквивалентность определяющих соотношений Нолла и Ильюшина .....	244
4.3.3.	Множества эквивалентных представлений оператора напряжений для простых тел. Определяющие соотношения как отображения диаграмм .....	245
4.3.4.	Выводы .....	252

## **Глава 5. ПОНЯТИЯ ОБРАЗА ПРОЦЕССА И ПЯТИМЕРНОЙ ИЗОТРОПИИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ .. 254**

§5.1.	Изотропия по Ильюшину (пятимерная изотропия). Варианты образа процесса при конечных деформациях .....	255
5.1.1.	Общая схема построения образа процесса (материальная и пространственная версии) .....	257
5.1.2.	Варианты образа процесса и свойств пятимерной изотропии при конечных деформациях .....	262
§5.2.	Сравнение вариантов образа процесса. Оценки для умеренно больших деформаций .....	264
5.2.1.	Замечания о простейшем лагранжевом голономном варианте .....	266
5.2.2.	Коротационные варианты .....	268
5.2.3.	Логарифмические варианты. Оценки для умеренно больших деформаций .....	271
5.2.4.	Выводы .....	275

<b>Часть II. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ</b> .....	277
<b>Глава А. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБЪЕКТИВНОСТИ ТЕНЗОРНЫХ ПРОЦЕССОВ И СВЯЗЕЙ МЕЖДУ НИМИ</b> .....	279
§А.1. Объективные тензоры различных рангов. Переплетения и диаграммы .....	280
А.1.1. Тензоры на евклидовом векторном пространстве .....	280
А.1.2. Объективные тензоры .....	287
А.1.3. Алгебра объективных тензоров .....	292
А.1.4. Представление группы замен системы отсчета в объективных тензорах. Переплетающие операторы .....	293
А.1.5. Категории и диаграммы объективных тензоров .....	297
§А.2. Действие группы замен системы отсчета на $\mathcal{L}_{k,m}$ .....	303
А.2.1. Действие на полиадных представлениях .....	304
А.2.2. Действие на тензорах специального вида .....	306
А.2.3. Материальные и пространственные блоки объективных тензоров .....	307
А.2.4. Многообразия Штифеля и Грассмана .....	310
А.2.5. Правильные свертки .....	312
А.2.6. Иерархия типов объективности .....	313
§А.3. Изотропные отображения и изотропные уравнения связи тензоров и тензорных процессов .....	315
А.3.1. Изотропные тензорные функции .....	315
А.3.2. Изотропные тензорные уравнения .....	318
А.3.3. Изотропные отображения тензорных процессов .....	319
<b>Глава Б. ЗАМЕЧАНИЯ И ДОПОЛНЕНИЯ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВАМ ТЕОРЕМ</b> ....	324
§Б.1. К доказательству Теорем 2.1, 2.2 .....	324
§Б.2. Доказательства теорем Главы 3 .....	329



<b>Глава В. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О МАССОВЫХ СИЛАХ</b> .....	338
§В.1. Структура массовых силовых взаимодействий .....	338
§В.2. Потенциальные поля внутренних массовых взаимодействий центрального типа .....	341
§В.3. Степень произвола возможной реализации полей напряжений и внутренних массовых сил при наличии кинематических связей .....	343
<b>Глава Г. ПРОСТЫЕ СРЕДЫ И ГИПОТЕЗА МАКРОФИЗИЧЕСКОЙ ОПРЕДЕЛИМОСТИ. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ. КОНЕЧНАЯ ПРЕДЫСТОРИЯ</b> .....	347
§Г.1. Некоторые общие классы определяющих соотношений простых тел и сред .....	347
§Г.2. Экспериментальная воспроизводимость реакций тел. Основы теории и практики определяющих экспериментов .....	352
§Г.3. Тела с конечной предысторией. Старение .....	355
<b>Глава Д. ПРИМЕРЫ ВАРИАНТОВ ОБРАЗА ПРОЦЕССА ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ</b> ..	361
§Д.1. Простой сдвиг и варианты траекторий конечной деформации .....	361
§Д.2. Модель гипотупругости. «Аномалия» колебаний напряжений.....	364
§Д.3. Соотношения пластичности малой кривизны. Дополнительные замечания .....	370
<b>Заключение</b> .....	374
<b>Литература</b> .....	379
<b>Предметный указатель</b> .....	413