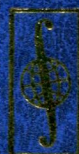


А.А.Самарский, П.Н.Вабищевич

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
РЕШЕНИЯ
ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**



УРСС

А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
РЕШЕНИЯ
ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

Москва • 2004



УРСС



Настоящее издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02-01-14086)

Самарский Александр Андреевич, Вабищевич Петр Николаевич
Численные методы решения обратных задач математической физики.
М.: Едиториал УРСС, 2004. — 480 с.

ISBN 5-354-00156-0

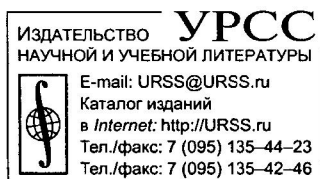
В традиционных курсах по методам решения задач математической физики рассматриваются прямые задачи. При этом решение определяется из уравнений с частными производными, которое дополняется определенными краевыми и начальными условиями. В обратных задачах некоторые эти составляющие постановки задачи отсутствуют. Неизвестными могут быть, например, начальные условия, граничные режимы, коэффициенты и правые части уравнений. Обратные задачи часто являются некорректными в классическом смысле и для их приближенного решения приходится применять методы регуляризации. В книге рассмотрены основные классы обратных задач для уравнений математической физики и численные методы их решения.

Книга рассчитана на студентов университетов и вузов, обучающихся по специальности «Прикладная математика», и специалистов по вычислительной математике и математическому моделированию.

Издательство «Едиториал УРСС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Лицензия ИД № 05175 от 25.06.2001 г. Подписано к печати 28.10.2003 г.
Формат 60×90/16. Тираж 1000 экз. Печ. л. 30. Зак. № 274
Отпечатано в ГУП «Облиздат». 248640, г. Калуга, пл. Старый Торг, 5.

ISBN 5-354-00156-0

© А. А. Самарский,
П. Н. Вабищевич, 2004
© Едиториал УРСС, 2004



Оглавление

Предисловие	9
Основные обозначения	11
Глава 1. Обратные задачи математической физики	12
1.1. Краевые задачи	12
1.1.1. Стационарные задачи математической физики	13
1.1.2. Нестационарные задачи математической физики	14
1.2. Корректные задачи для уравнений с частными производными	15
1.2.1. Понятие корректности	15
1.2.2. Краевая задача для параболического уравнения	16
1.2.3. Краевая задача для эллиптического уравнения	19
1.3. Некорректные задачи	21
1.3.1. Пример некорректной задачи	21
1.3.2. Понятие условно корректной задачи	23
1.3.3. Условная корректность задачи с обратным временем	23
1.4. Классификация обратных задач математической физики	24
1.4.1. Прямые и обратные задачи	25
1.4.2. Коэффициентные обратные задачи	26
1.4.3. Граничные обратные задачи	27
1.4.4. Эволюционные обратные задачи	28
1.5. Задачи и упражнения	28
Глава 2. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений	31
2.1. Сеточная задача	31
2.1.1. Модельная дифференциальная задача	31
2.1.2. Разностная схема	33
2.1.3. Схемы метода конечных элементов	36
2.1.4. Метод баланса	37
2.2. Сходимость разностных схем	39
2.2.1. Разностные тождества	39
2.2.2. Свойства разностного оператора A	41
2.2.3. Точность разностных схем	43
2.3. Решение сеточной задачи	44
2.3.1. Метод прогонки	44

2.3.2.	Корректность алгоритма прогонки	45
2.3.3.	Метод Гаусса	46
2.4.	Программная реализация и примеры расчетов	47
2.4.1.	Постановка задачи	48
2.4.2.	Разностные схемы	49
2.4.3.	Программа	51
2.4.4.	Результаты расчетов	57
2.5.	Задачи и упражнения	57
Глава 3.	Краевые задачи для эллиптических уравнений	62
3.1.	Сеточная эллиптическая задача	62
3.1.1.	Краевые задачи	63
3.1.2.	Сеточная задача	63
3.1.3.	Задачи в нерегулярных областях	65
3.2.	Погрешность приближенного решения	67
3.2.1.	Сеточные эллиптические операторы	67
3.2.2.	Сходимость разностного решения	69
3.2.3.	Принцип максимума	70
3.3.	Итерационные методы решения сеточных задач	72
3.3.1.	Прямые методы решения сеточных задач	72
3.3.2.	Итерационные методы	74
3.3.3.	Примеры двухслойных итерационных методов	76
3.3.4.	Итерационные методы вариационного типа	78
3.3.5.	Итерационные методы с диагональным переобуславливателем	80
3.3.6.	Попеременно-треугольные итерационные методы	81
3.4.	Программная реализация и примеры расчетов	84
3.4.1.	Постановка задачи и разностная схема	84
3.4.2.	Подпрограмма для решения сеточных уравнений	85
3.4.3.	Программа	94
3.4.4.	Результаты расчетов	99
3.5.	Задачи и упражнения	102
Глава 4.	Краевые задачи для параболических уравнений	106
4.1.	Разностные схемы	106
4.1.1.	Краевые задачи	106
4.1.2.	Аппроксимация по пространству	108
4.1.3.	Аппроксимация по времени	109
4.2.	Устойчивость двухслойных разностных схем	111
4.2.1.	Основные понятия	112
4.2.2.	Устойчивость по начальным данным	114
4.2.3.	Устойчивость по правой части	117
4.3.	Трехслойные операторно-разностные схемы	119

4.3.1. Устойчивость по начальным данным	119
4.3.2. Переход к двухслойной схеме	121
4.3.3. ρ -устойчивость трехслойных схем	123
4.3.4. Оценки в более простых нормах	125
4.3.5. Устойчивость по правой части	127
4.4. Исследование разностных схем для модельной задачи	128
4.4.1. Условия устойчивости двухслойной схемы	128
4.4.2. Сходимость разностных схем	129
4.4.3. Устойчивость трехслойных схем с весами	130
4.5. Программная реализация и примеры расчетов	132
4.5.1. Постановка задачи	132
4.5.2. Линеаризованные разностные схемы	133
4.5.3. Программа	136
4.5.4. Примеры расчетов	139
4.6. Задачи и упражнения	142
Глава 5. Методы решения некорректных задач	145
5.1. Метод регуляризации А. Н. Тихонова	145
5.1.1. Постановка задачи	145
5.1.2. Вариационный метод	146
5.1.3. Сходимость метода регуляризации	147
5.2. Скорость сходимости метода регуляризации	150
5.2.1. Уравнение Эйлера для сглаживающего функционала	150
5.2.2. Классы априорных ограничений на решение	151
5.2.3. Оценки скорости сходимости	152
5.3. Выбор параметра регуляризации	153
5.3.1. Выбор в классе априорных ограничений на решение	153
5.3.2. Метод невязки	155
5.3.3. Другие способы выбора параметра регуляризации	156
5.4. Итерационные методы решения некорректных задач	156
5.4.1. Особенности применения итерационных методов	157
5.4.2. Итерационное решение некорректной задачи	158
5.4.3. Оценки скорости сходимости	160
5.4.4. Обобщения	162
5.5. Программная реализация и примеры расчетов	163
5.5.1. Задача продолжения потенциала	163
5.5.2. Интегральное уравнение	166
5.5.3. Вычислительная реализация	167
5.5.4. Программа	168
5.5.5. Результаты расчетов	172
5.6. Задачи и упражнения	175

Глава 6. Идентификация правой части	178
6.1. Восстановление правой части стационарных задач по известному решению	178
6.1.1. Постановка задачи	179
6.1.2. Разностные алгоритмы	180
6.1.3. Регуляризация по А. Н. Тихонову	183
6.1.4. Другие алгоритмы	185
6.1.5. Вычислительная и программная реализация	186
6.1.6. Примеры расчетов	194
6.2. Идентификация правой части параболического уравнения	196
6.2.1. Модельная задача	196
6.2.2. Глобальная регуляризация	199
6.2.3. Локальная регуляризация	201
6.2.4. Итерационное решение задачи идентификации	203
6.2.5. Результаты расчетов	213
6.3. Восстановление зависимости правой части от времени	216
6.3.1. Обратная задача	216
6.3.2. Краевая задача для нагруженного уравнения	217
6.3.3. Разностная схема	218
6.3.4. Сеточная нелокальная задача и программная реализация	219
6.3.5. Примеры расчетов	224
6.4. Идентификация постоянной во времени правой части параболического уравнения	226
6.4.1. Постановка задачи	226
6.4.2. Оценка устойчивости	227
6.4.3. Разностная задача	230
6.4.4. Решение сеточной задачи	232
6.4.5. Результаты расчетов	241
6.5. Восстановление правой части эллиптического уравнения по данным граничных наблюдений	242
6.5.1. Постановка обратной задачи	243
6.5.2. Единственность решения обратной задачи	245
6.5.3. Разностная задача	246
6.5.4. Решение сеточной задачи	250
6.5.5. Программа	253
6.5.6. Результаты расчетов	261
6.6. Задачи и упражнения	262
Глава 7. Эволюционные обратные задачи	267
7.1. Нелокальное возмущение начальных условий	267
7.1.1. Постановка задачи	268
7.1.2. Общие методы решения некорректных эволюционных задач	269

7.1.3. Возмущение начальных условий	271
7.1.4. Сходимость приближенного решения к точному	273
7.1.5. Эквивалентность нелокальной задачи и задачи оптимального управления	277
7.1.6. Разностные нелокальные задачи	280
7.1.7. Программная реализация	284
7.1.8. Результаты расчетов	288
7.2. Регуляризованные разностные схемы	289
7.2.1. Принцип регуляризации разностных схем	290
7.2.2. Задача с обратным временем	296
7.2.3. Метод квазиобращения	298
7.2.4. Регуляризованные аддитивные схемы	307
7.2.5. Программа	311
7.2.6. Примеры расчетов	318
7.3. Итерационное решение ретроспективной задачи	321
7.3.1. Постановка задачи	321
7.3.2. Разностная задача	322
7.3.3. Итерационное уточнение начального условия	323
7.3.4. Программа	326
7.3.5. Результаты расчетов	333
7.4. Эволюционное уравнение второго порядка	335
7.4.1. Модельная задача	335
7.4.2. Эквивалентное уравнение первого порядка	338
7.4.3. Возмущение начальных условий	340
7.4.4. Возмущение уравнения	343
7.4.5. Регуляризованные разностные схемы	346
7.4.6. Программа	350
7.4.7. Примеры расчетов	356
7.5. Продолжение нестационарных полей по данным точечных наблюдений	357
7.5.1. Постановка задачи	357
7.5.2. Вариационная задача	360
7.5.3. Сеточная задача	362
7.5.4. Численное решение сеточной задачи	364
7.5.5. Программа	366
7.5.6. Примеры расчетов	374
7.6. Задачи и упражнения	377
Глава 8. Другие задачи	379
8.1. Продолжение по пространственной переменной в граничной обратной задаче	379
8.1.1. Постановка задачи	380
8.1.2. Метод квазиобращения	381
8.1.3. Разностные схемы метода квазиобращения	384

8.1.4. Программа	388
8.1.5. Примеры расчетов	394
8.2. Нелокальное возмущение граничных условий	397
8.2.1. Модельная задача	397
8.2.2. Нелокальная краевая задача	398
8.2.3. Локальная регуляризация	398
8.2.4. Разностная нелокальная задача	401
8.2.5. Программа	402
8.2.6. Примеры расчетов	408
8.3. Идентификация граничного режима в двумерной задаче	410
8.3.1. Постановка задачи	411
8.3.2. Итерационный метод	412
8.3.3. Сеточная задача	415
8.3.4. Итерационное уточнение граничного условия	417
8.3.5. Программная реализация	420
8.3.6. Примеры расчетов	428
8.4. Коэффициентная обратная задача для нелинейного параболического уравнения	429
8.4.1. Постановка задачи	429
8.4.2. Функциональная оптимизация	435
8.4.3. Параметрическая оптимизация	438
8.4.4. Сеточная задача	442
8.4.5. Программа	444
8.4.6. Примеры расчетов	451
8.5. Коэффициентная обратная задача для эллиптического уравнения	454
8.5.1. Постановка задачи	454
8.5.2. О единственности решения обратной задачи	455
8.5.3. Сеточная обратная задача	457
8.5.4. Итерационное решение обратной задачи	459
8.5.5. Программа	461
8.5.6. Результаты расчетов	468
8.6. Задачи и упражнения	471
Литература	475
Предметный указатель	477