

С.М. Ситник, Э.Л. Шишкина

МЕТОД ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

для дифференциальных
уравнений
с операторами Бесселя



С.М. Ситник, Э.Л. Шишкина

МЕТОД ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

для дифференциальных
уравнений
с операторами Бесселя



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2019

УДК 517.9, 517.4
ББК 22.161.1; 22.161.6
С 41

Ситник С. М., Шишкина Э. Л. **Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2019. — 224 с. — ISBN 978-5-9221-1819-4.

В монографии излагаются как известные, так и недавно полученные результаты теории операторов преобразования, представляющей собой полностью оформившийся самостоятельный раздел математики, находящийся на стыке дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, функционального анализа, теории функций, комплексного анализа, теории специальных функций и дробного интегро-дифференцирования, теории обратных задач и задач рассеяния.

Для специалистов в области математики, преподавателей вузов, научных сотрудников, аспирантов, студентов, а также для широкого круга читателей, интересующихся проблемами современной математики.

ISBN 978-5-9221-1819-4

© ФИЗМАТЛИТ, 2019

© С. М. Ситник, Э. Л. Шишкина, 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Введение. Исторические сведения	8
Часть I. Общая теория операторов преобразования	
Глава 1. Предварительные сведения и обозначения	20
§ 1.1. Специальные функции	20
1.1.1. Гамма-функция, бета-функция, пси-функция, символ Похгам- мера и биномиальные коэффициенты	20
1.1.2. Функции Бесселя	23
1.1.3. Гипергеометрическая функция Гаусса	24
1.1.4. Функции Лежандра	25
1.1.5. Функция Миттаг-Леффлера	26
1.1.6. Обобщённые функции гипергеометрического типа	27
§ 1.2. Функциональные пространства	29
1.2.1. Гёльдеровы функции, абсолютно непрерывные функции, класс AC^m	30
1.2.2. Класс L_p и его свойства	32
1.2.3. Пространства C_{ev}^m , L_p^γ и S_{ev} . Весовые обобщённые функции	33
§ 1.3. Основные интегральные преобразования	37
1.3.1. Преобразование Фурье, синус- и косинус-преобразования, преобразование Ханкеля	37
1.3.2. Пространство Киприянова	37
1.3.3. Преобразование Меллина. Теорема Слейтер	38
§ 1.4. Операторы дробного интегро-дифференцирования	44
1.4.1. Дробные интегралы и производные Римана–Лиувилля и Лиу- вилля	44
1.4.2. Дробные интегралы и производные Эрдейи–Кобера	46
1.4.3. Дробный интеграл по произвольной функции	47
Глава 2. Классификация и свойства операторов преобразования	48
§ 2.1. Операторы преобразования, связанные с операторами Бесселя и второй производной	48
2.1.1. Основные классы дифференциальных уравнений с оператора- ми Бесселя	48
2.1.2. Операторы преобразования Сонина и Пуассона	49
2.1.3. Оператор спуска по параметру для оператора Бесселя	52
§ 2.2. Обобщённый сдвиг и его свойства	54
2.2.1. Операторы обобщённого сдвига, выраженные через степенные ряды, и задача Коши	54
2.2.2. Оператор обобщённого сдвига, связанный с оператором Бес- селя	56

2.2.3. Обобщённая свертка	65
2.2.4. Обобщённые сдвиги, связанные с потенциалом	66
§ 2.3. Классификация и свойства различных классов операторов преобразования Бушмана–Эрдейи	70
2.3.1. Операторы преобразования Бушмана–Эрдейи различных классов	70
2.3.2. Интегральные операторы преобразования Бушмана–Эрдейи первого рода и нулевого порядка гладкости	72
2.3.3. Факторизация операторов Бушмана–Эрдейи	80
2.3.4. Унитарность операторов Бушмана–Эрдейи	88
2.3.5. Интегральные операторы преобразования Бушмана–Эрдейи второго рода	92
§ 2.4. Унитарные операторы преобразования Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова	95
§ 2.5. Весовое сферическое среднее	99
2.5.1. Интегралы по части сферы	99
2.5.2. Многомерный обобщённый сдвиг, весовое сферическое среднее и итерированное весовое сферическое среднее	104
2.5.3. Весовое сферическое среднее как оператор преобразования	107
§ 2.6. Другие типы операторов преобразований	110

Часть II. Применение метода операторов преобразования к решению уравнений в частных производных

Глава 3. Приложения операторов преобразования Бушмана–Эрдейи	112
§ 3.1. Приложения операторов преобразования Бушмана–Эрдейи к задачам для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу и лемме Копсона	112
§ 3.2. Приложения операторов преобразования к установлению формул связи между решениями дифференциальных уравнений	114
§ 3.3. Приложения операторов преобразования Сонина–Катрахова и Пуассона–Катрахова к решению одной пары интегро-дифференциальных уравнений	115
§ 3.4. Приложения операторов преобразования к установлению эквивалентности норм пространств Киприянова и весовых пространств Соболева	116
Глава 4. Общее уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу	122
§ 4.1. Абстрактное уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу	122
4.1.1. Рекуррентные формулы	122
4.1.2. Оператор Пуассона и абстрактное уравнение ЭПД	124
§ 4.2. Гиперболические уравнения с одной пространственной переменной	126
§ 4.3. Уравнение со спектральным параметром	131
§ 4.4. Первая задача Коши для общего уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу	137
4.4.1. Случай $k > n + \gamma - 1$	138
4.4.2. Случай $k \leq n + \gamma - 1$	140
4.4.3. Одномерный случай	142
§ 4.5. Вторая задача Коши для общего уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу	145

§ 4.6. B -ультрагиперболическое уравнение и обобщение теоремы Асгейрссона	148
§ 4.7. Итерированное весовое сферическое среднее и его свойства	153
§ 4.8. Применение тождества для итерированного сферического среднего к задаче компьютерной томографии.	159
§ 4.9. О приложениях весовых сферических средних	162
§ 4.10. Явное построение дробных степеней оператора Бесселя	163

Часть III. Методы построения ОП

для оператора Бесселя и родственных операторов

Глава 5. Композиционный метод построения ОП	169
§ 5.1. B -гиперболические операторы преобразования	170
§ 5.2. B -эллиптические операторы преобразования.	173
§ 5.3. B -параболические операторы преобразования	175
§ 5.4. Операторы сдвига по параметру типа Лаундеса.	176
Глава 6. Построение ОП для возмущённого уравнения Бесселя с переменным потенциалом.	179
§ 6.1. Постановка задачи нахождения интегрального представления решений для возмущённого уравнения Бесселя с переменным потенциалом	179
§ 6.2. Решение основного интегрального уравнения для ядра оператора преобразования	181
§ 6.3. Оценки для случая степенного сингулярного в нуле потенциала	187
Список литературы	192