

**Синергетика**

**ОТ ПРОШЛОГО  
К БУДУЩЕМУ**



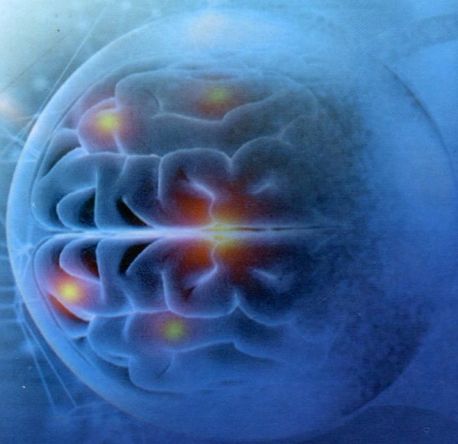
**№ 102**

Серия основана  
в 2002 г.

Председатель редколлегии  
профессор  
Г. Г. Малинецкий

**С. А. Кащенко**

**ДИНАМИКА МОДЕЛЕЙ  
на основе  
ЛОГИСТИЧЕСКОГО  
УРАВНЕНИЯ  
С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ**



URSS

**С. А. Кащенко**

**ДИНАМИКА МОДЕЛЕЙ  
НА ОСНОВЕ  
ЛОГИСТИЧЕСКОГО  
УРАВНЕНИЯ  
С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ**



**URSS**  
**МОСКВА**

ББК 22.161.6 22.161.7 22.311 22.318



*Настоящее издание осуществлено при финансовой поддержке  
Российского фонда фундаментальных исследований  
(проект № 20–11–00005), не подлежит продаже*

**Кащенко Сергей Александрович**

**Динамика моделей на основе логистического уравнения с запаздыванием.** — М.:  
КРАСАНД, 2020. — 576 с. (Синергетика: от прошлого к будущему. № 102.)

Книга посвящена исследованиям логистического уравнения с запаздыванием. Основное внимание уделено аналитическим методам анализа. Разработанные в этой монографии методы и приемы исследований допускают их распространение и на другие классы уравнений с запаздыванием.

Автором исследовано достаточно большое количество уравнений (и систем уравнений) с запаздыванием. Изучены модернизированные и обобщенные, с медленно и с быстро меняющимися во времени коэффициентами, с нелинейностями более общего вида, с несколькими сосредоточенными запаздываниями, с распределенным запаздыванием, нелинейно либо неавтономно зависящими коэффициентами.

*Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Дополнительное соглашение № 075–02–2020–1514/1 к Соглашению о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075–02–2020–1514)*

Издательство «КРАСАНД». 117335, Москва, Нахимовский пр-т, 56.  
Формат 70×100/16. Тираж 300 экз. Уч.-изд. л. 42. Подписано в печать 29.10.2020. Зак. № 991.  
Отпечатано в АО «Областная типография «Печатный двор».  
432049, Ульяновск, ул. Пушкирева, д. 27.

ISBN 978–5–396–01026–0

© КРАСАНД, 2020

27061 ID 266784



9 785396 010260



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

# Содержание

От редакции . . . . .	11
<b>Удивительный мир систем с запаздыванием (Г. Г. Малинецкий) . . . . .</b>	<b>13</b>
От автора . . . . .	19
Предисловие . . . . .	21
Список литературы . . . . .	36
<b>Глава 1. Локальная и глобальная устойчивость. Бифуркационный анализ . . . . .</b>	<b>37</b>
Введение . . . . .	37
1.1. Оценка области глобальной устойчивости состояния равновесия логистического уравнения с запаздыванием . . . . .	41
1.1.1. Основная конструкция . . . . .	42
1.1.2. Случай $m = 0$ . . . . .	46
1.1.3. Случай $m = 1$ . . . . .	48
1.1.4. Случай $m = 2$ . . . . .	53
1.2. Бифуркация Андронова—Хопфа . . . . .	60
1.2.1. Бифуркация Андронова—Хопфа в логистическом уравнении с запаздыванием . . . . .	61
1.2.2. Бифуркация Андронова—Хопфа в логистическом уравнении с запаздыванием и с малым возмущением . . . . .	62
1.3. Бифуркация в окрестности состояния равновесия в случае, когда малые возмущения содержат большое запаздывание . . . . .	63
1.3.1. Построение нормальной формы в окрестности состояния равновесия . . . . .	64
1.3.2. О локальной динамике уравнения (1.52) в случае сверхбольших значений $h$ . . . . .	65
1.3.3. Малые возмущения в окрестности цикла . . . . .	69
1.3.4. Пример. Комплексное логистическое уравнение с запаздыванием . . . . .	72

1.4. Параметрический резонанс при двухчастотном возмущении в логистическом уравнении с запаздыванием . . . . .	74
1.4.1. Алгоритмическая часть . . . . .	76
1.4.2. Результаты численного исследования . . . . .	79
Список литературы . . . . .	84
<b>Глава 2. Динамика в случае медленно осциллирующих и быстро осциллирующих коэффициентов . . . . .</b>	<b>87</b>
2.1. Динамика логистического уравнения с запаздыванием и медленно меняющимися коэффициентами . . . . .	87
2.1.1. Построение почти периодического решения, близкого к $a^{-1}(\tau)$ и исследование его устойчивости . . . . .	89
2.1.2. Исследование устойчивости решения $u_0(\tau, \varepsilon)$ в критическом случае . . . . .	90
2.1.3. Бифуркация Андронова—Хопфа . . . . .	93
2.1.4. Алгоритм построения регулярных почти периодических решений при условии $r(\tau)T(\tau) \equiv \text{const}$ . . . . .	95
2.1.5. Асимптотика релаксационных решений в случае больших значений мальтузианского коэффициента . . . . .	98
2.1.6. Асимптотика решений уравнения (2.1) при условии, когда достаточно большим является коэффициент запаздывания . . . . .	101
2.2. Применение принципа усреднения к исследованию динамики логистического уравнения с запаздыванием . . . . .	104
2.2.1. Усреднение при постоянном запаздывании . . . . .	106
2.2.2. Линейный анализ . . . . .	106
2.2.3. Нелинейный анализ. Бифуркация Андронова—Хопфа . . . . .	108
2.2.4. Усреднение в случае переменного запаздывания . . . . .	110
Список литературы . . . . .	120
<b>Глава 3. Релаксационные колебания в логистическом уравнении с запаздыванием . . . . .</b>	<b>123</b>
Введение . . . . .	123
3.1. Асимптотика периодического решения обобщенного логистического уравнения с запаздыванием . . . . .	124
3.1.1. Постановка задачи и основные результаты . . . . .	124
3.1.2. Доказательство существования периодического решения . . . . .	128
3.1.3. Доказательство теорем 3.2–3.4 . . . . .	132
3.1.4. Завершение обоснования теоремы 3.1 . . . . .	136
3.1.5. Случай, когда большим параметром является коэффициент запаздывания . . . . .	142

3.1.6. Об асимптотическом разложении периодического логистического уравнения с запаздыванием . . .	143
3.1.7. О некоторых выводах биологического характера . . . . .	145
3.2. Логистическое уравнение с запаздыванием и с малой миграцией . . . . .	147
3.2.1. Быстро осциллирующие решения уравнения с малой миграцией . . . . .	148
3.2.2. Особенности логистического уравнения с двумя запаздываниями и с малой миграцией . . . . .	149
3.3. Управление периодом релаксационных колебаний с помощью малых воздействий . . . . .	151
3.4. Оптимизация процесса охоты . . . . .	153
Список литературы . . . . .	158
<b>Глава 4. Локальный и нелокальный анализ динамики уравнения с двумя запаздываниями . . . . .</b>	<b>161</b>
Введение . . . . .	161
4.1. Учет возрастных групп в уравнении Хатчинсона . . . . .	162
4.1.1. Локальный анализ . . . . .	163
4.1.2. Исследование характеристического квазимногочлена . . . . .	163
4.1.3. Построение нормальной формы . . . . .	168
4.1.4. Численный анализ исследуемой системы . . . . .	172
4.2. Динамика логистического уравнения, содержащего запаздывание . . . . .	181
4.2.1. Бифуркация Андронова—Хопфа . . . . .	183
4.2.2. Построение квазинормальных форм при больших значениях параметра $\lambda$ . . . . .	186
4.2.3. Медленно осциллирующие решения . . . . .	186
4.2.4. О решении краевой задачи (4.64), (4.65) . . . . .	188
4.2.5. Быстро осциллирующие решения . . . . .	192
4.2.6. Более сложная конструкция . . . . .	193
4.2.7. Асимптотика релаксационного цикла при больших $\lambda$ . . . . .	194
4.3. Динамика логистического уравнения с двумя запаздываниями . . . . .	199
4.3.1. Асимптотика релаксационного цикла . . . . .	200
4.3.2. Асимптотика релаксационного цикла при малых значениях параметра $\sigma$ . . . . .	203
4.3.3. Асимптотика медленно осциллирующих структур в малой окрестности состояния равновесия уравнения (4.88) . . .	205
4.3.4. Асимптотика быстро осциллирующих структур в малой окрестности состояния равновесия уравнения (4.88) . . .	210

4.4. О локальной динамике нелинейных дифференциальных уравнений с двумя запаздываниями . . .	212
Список литературы . . . . .	214
<b>Глава 5. Уравнения и системы логистических уравнений с запаздыванием и запаздывающим управлением . .</b>	<b>217</b>
Введение . . . . .	217
5.1. Динамика логистического уравнения с запаздыванием и запаздывающим управлением . . . . .	218
5.1.1. Уравнение с малым коэффициентом запаздывающего управления . . . . .	218
5.1.2. Сосуществование близких циклов . . . . .	222
5.1.3. Локальный анализ уравнения (5.1) при малых $\gamma$ . . . . .	225
5.1.4. Уравнение с большим коэффициентом запаздывающего управления . . . . .	226
5.1.5. Управление динамикой (5.1) с помощью малых значений $h$ . . . . .	227
5.1.6. Основная конструкция . . . . .	227
5.1.7. Бифуркационное значение параметра запаздывания $T$ . . . .	229
5.1.8. Критический случай. Построение квазинормальных форм . .	230
5.1.9. Динамика при малом мальтузианском коэффициенте и большом запаздывании в управляющем воздействии . . . .	232
5.1.10. Выводы . . . . .	232
5.2. Корпоративная динамика систем логистических уравнений с запаздыванием и с большим запаздывающим управлением . . . . .	233
5.2.1. Динамика системы из двух связанных логистических уравнений с запаздыванием . . . . .	234
5.2.2. Более общая конструкция . . . . .	239
5.2.3. Численное исследование . . . . .	241
5.2.4. О корпоративной динамике системы из трех логистических уравнений с запаздыванием . . . . .	247
5.2.5. Выводы . . . . .	250
Список литературы . . . . .	251
<b>Глава 6. Модифицированные логистические уравнения с запаздыванием . . . . .</b>	<b>255</b>
Введение . . . . .	255
6.1. Периодические решения нелинейных уравнений, обобщающих логистическое уравнение с запаздыванием . . .	255

6.1.1. Основные результаты для логистического уравнения с запаздыванием . . . . .	257
6.1.2. Периодические решения уравнения (6.10) . . . . .	259
6.1.3. Применение результатов раздела 6.1.2 к уравнению (6.6) . . . . .	265
6.1.4. Релаксационные циклы при условии $\lambda \gg 1$ . . . . .	267
6.2. Релаксационные колебания в логистическом уравнении с запаздыванием и модифицированными нелинейностями . . . . .	271
6.2.1. Бифуркация Андронова—Хопфа в уравнениях с одним запаздыванием . . . . .	273
6.2.2. Ступенчатые решения логистического уравнения с запаздываниями и ограничением нелинейной функции . . . . .	276
6.2.3. Ступенчатые решения уравнения с двумя запаздываниями . . . . .	281
6.2.4. Асимптотика периодического решения уравнения (6.43) . . . . .	287
6.2.5. Асимптотика периодического решения уравнений (6.46) и (6.47) . . . . .	289
Список литературы . . . . .	294
<b>Глава 7. Логистическое уравнение с запаздыванием, зависящим от искомой функции . . . . .</b>	<b>297</b>
7.1. Локальная динамика обобщенного логистического уравнения с запаздыванием, зависящим от искомой функции . . . . .	297
7.1.1. Линейный анализ . . . . .	299
7.1.2. Основные результаты . . . . .	302
7.1.3. Транскритическая и виллообразная бифуркации . . . . .	303
7.1.4. Бифуркация Андронова—Хопфа . . . . .	304
7.1.5. Примеры . . . . .	309
7.2. Бифуркационные явления в логистическом уравнении с запаздываниями, зависящими от искомой функции . . . . .	311
7.2.1. Линейный анализ . . . . .	313
7.2.2. Бифуркации медленно осциллирующих решений . . . . .	316
7.2.3. Бифуркации быстро осциллирующих решений . . . . .	318
7.2.4. Бифуркации в случае $\alpha \approx 1$ . . . . .	320
7.3. Релаксационные колебания в уравнении с непостоянным запаздыванием . . . . .	325
7.3.1. Основные утверждения . . . . .	326
7.3.2. Доказательство существования периодического решения . . . . .	328
7.3.3. Свойства периодического решения . . . . .	337
7.3.4. Свойства решения при конкретизации запаздывания . . . . .	339
Список литературы . . . . .	342



<b>Глава 8. Динамические свойства</b>	
<b>в модели популяции насекомых . . . . .</b>	<b>347</b>
Введение . . . . .	347
8.1. Математическая модель эксперимента Николсона . . . . .	348
8.1.1. Локальный анализ модели . . . . .	351
8.1.2. Анализ нелинейного уравнения . . . . .	356
8.1.3. Некоторые свойства двух уравнений . . . . .	360
8.1.4. Теоретическое объяснение экспериментального результата Николсона . . . . .	362
8.1.5. Численный анализ одного уравнения . . . . .	363
8.1.6. Численный анализ двух уравнений . . . . .	367
8.2. Динамика логистического уравнения с двумя запаздываниями, моделирующего изменение численностей популяции . . . . .	368
8.2.1. Линейный анализ . . . . .	372
8.2.2. Нелинейный анализ . . . . .	375
8.2.3. Случай $a_0 = 0$ . . . . .	377
8.2.4. Динамика решений при условии $ a_0  = 1$ . . . . .	381
8.2.5. Случай $h_0 = 1/2$ . . . . .	383
8.3. Исследование стационарных режимов дифференциально-разностного уравнения динамики популяции насекомых . . . . .	385
8.3.1. Основные результаты о режимах с одной генерацией в год . . . . .	386
8.3.2. О доказательстве теорем 8.7–8.10 . . . . .	389
8.3.3. Режимы с $m > 1$ генерациями в год . . . . .	396
8.3.4. О зависимости стационарных режимов от параметров $h$ и $\lambda$ . . . . .	400
Список литературы . . . . .	402
<b>Глава 9. Динамика системы из двух логистических</b>	
<b>уравнений с запаздыванием, описывающих задачи</b>	
<b>«хищник — жертва» и «паразит — хозяин» . . . . .</b>	<b>405</b>
Введение . . . . .	405
9.1. Сложные колебания в задаче «хищник — жертва» . . . . .	405
9.1.1. Предварительные сведения . . . . .	407
9.1.2. Результаты для случая $\lambda_1 \gg 1$ . . . . .	412
9.1.3. Вспомогательные утверждения . . . . .	418
9.1.4. Обоснование теорем 9.1–9.5 . . . . .	427
9.1.5. Построение асимптотики решений . . . . .	429
9.1.6. Исследование устойчивости . . . . .	436

9.1.7. О задаче «хищник — жертва» с учетом возрастной структуры . . . . .	446
9.1.8. Обсуждение результатов . . . . .	447
9.2. Стационарные режимы в задаче «паразит — хозяин» . . . . .	450
9.2.1. Постановка задачи и результаты . . . . .	450
9.2.2. О некоторых выводах биологического характера . . . . .	453
9.2.3. О зависимости стационарных режимов от коэффициента «давления» . . . . .	454
9.2.4. О влиянии возрастной структуры на динамику изменения численностей . . . . .	455
9.2.5. Обсуждение результатов . . . . .	455
Список литературы . . . . .	456
<b>Глава 10. Релаксационные колебания в системах взаимодействующих популяций . . . . .</b>	<b>459</b>
10.1. Релаксационные колебания в моделях многовидовых сообществ . . . . .	459
10.1.1. Вычисление инвариантов экологических уравнений . . . . .	462
10.1.2. Сложные колебания в задаче о конкуренции видов . . . . .	465
10.1.3. Динамика экосистем при наличии «хищника» . . . . .	470
10.2. Асимптотика установившихся режимов конечно-разностных аппроксимаций логистического уравнения с запаздыванием и с малой диффузией . . . . .	479
10.2.1. Колебания в одномерной области типа отрезка . . . . .	481
10.2.2. О колебаниях на «окружности» . . . . .	486
10.2.3. О доказательстве результатов . . . . .	488
10.2.4. О колебаниях в двумерной области . . . . .	491
Список литературы . . . . .	497
<b>Глава 11. Динамика конечномерных логистических отображений . . . . .</b>	<b>501</b>
Введение . . . . .	501
11.1. Конечномерные отображения, описывающие динамику логистического уравнения с запаздыванием . . . . .	501
11.1.1. Простейшие свойства логистического уравнения с запаздыванием. Постановка задачи . . . . .	501
11.1.2. Вывод дискретного аналога логистического уравнения с запаздыванием . . . . .	504
11.2. Область существования неотрицательного решения . . . . .	505

11.3. Локальные свойства дискретного аналога логистического уравнения. Бифуркация Андронова—Хопфа . . .	513
11.4. Нелокальные устойчивые решения дискретного аналога логистического уравнения . . . . .	518
11.5. Некоторые другие дискретные модели . . . . .	522
11.6. О локальной динамике уравнений вида (11.39) с непрерывным временем . . . . .	524
11.7. О динамике дифференциально-разностного уравнения, «близкого» к разностному уравнению (11.56) . . . . .	525
Выводы . . . . .	526
Список литературы . . . . .	527
<b>Глава 12. Обзор результатов, полученных с помощью метода большого параметра . . . . .</b>	<b>531</b>
Введение . . . . .	531
12.1. Асимптотика аттракторов в простейших классах математических моделей с запаздыванием . . . . .	531
12.1.1. Асимптотика периодического решения системы (12.2) . . . . .	533
12.1.2. Асимптотика решений системы (12.5) . . . . .	535
12.2. Колебания в системе уравнений, моделирующих иммунный отклик организма . . . . .	538
12.3. Асимптотика колебаний в математической модели реакции Белоусова . . . . .	539
12.4. Динамика системы уравнений, описывающих работу ядерного реактора . . . . .	541
12.5. Сложные колебания в автогенераторе с инерционным запаздыванием . . . . .	543
12.6. Релаксационные колебания в простейших моделях с запаздыванием . . . . .	546
12.7. О релаксационных колебаниях в моделях динамики лазеров . . . . .	552
12.8. Обзор результатов о динамике нейронных сетей . . . . .	565
Список литературы . . . . .	569