

А.В. ЧЕРЕМУШКИН

ДЕКОМПОЗИЦИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ ФУНКЦИЙ

$$\begin{cases} f_{1e}^{(0)}(\widetilde{V}_1^{*(0)}) \oplus f_{2e}(V_2^*) \equiv h_{1u}^{(0)}(\widetilde{U}_1^{*(0)}) \oplus h_{2u}(U_2^*) \pmod{\mathcal{U}_2} \\ f'_{1e}(\widetilde{V}_1^{*'}) \equiv h'_{1u}(\widetilde{U}_1^{*'}) \pmod{\mathcal{U}_{s-1}}. \end{cases}$$

МОНОГРАФИЯ



А.В. Черемушкин

ДЕКОМПОЗИЦИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ ФУНКЦИЙ

МОНОГРАФИЯ

Москва
КУРС
2020

УДК 519.7(075.8)
ББК 22.176я73
Ч46

ФЗ
№ 436-ФЗ

Издание не подлежит маркировке
в соответствии с п. 1 ч. 4 ст. 11

Рецензенты:

Ф.М. Мальшев — д-р физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник Математического института им. В.А. Стеклова РАН;

О.В. Камловский — канд. физ.-мат. наук, доцент, ведущий научный сотрудник ООО «Центр сертификационных исследований»

Черемушкин А.В.

Ч46 Декомпозиция и классификация дискретных функций: монография / А.В. Черемушкин. — М.: КУРС, 2020. — 288 с. — (Серия «Наука»).

ISBN 978-5-907064-09-6

Монография посвящена двум классическим задачам логического синтеза. Она содержит большой спектр результатов и справочного фактического материала по классификации и декомпозиции функций. Это делает ее безусловно полезной для широкого круга специалистов в области прикладной математики и теоретической кибернетики, а также всех желающих ознакомиться с данной темой.

УДК 519.7(075.8)

ББК 22.176я73



ISBN 978-5-907064-09-6

© Черемушкин А.В., 2018
© КУРС, 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
--------------------------	---

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ	9
---------------------------------	---

Глава 1

БЕСПОВТОРНАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ СИЛЬНО ЗАВИСИМЫХ ФУНКЦИЙ	11
---	----

§ 1. Необходимые определения и результаты.....	11
--	----

1.1. <i>Сильно зависимые функции</i>	11
--	----

1.2. <i>Основные группы преобразований</i>	14
--	----

1.3. <i>Бинарные сильно зависимые функции</i>	18
---	----

1.4. <i>Группы главных автострофий моноидов</i>	21
---	----

§ 2. Решение функциональных уравнений.....	25
--	----

2.1. <i>Обобщенное уравнение общей ассоциативности</i>	25
--	----

2.2. <i>Теорема Белоусова</i>	26
-------------------------------------	----

§ 3. Каноническая декомпозиция.....	31
-------------------------------------	----

3.1. <i>Отношение эквивалентности на множестве переменных</i>	31
---	----

3.2. <i>Основная теорема</i>	33
------------------------------------	----

3.3. <i>Каноническая декомпозиция</i>	37
---	----

§ 4. Однозначность канонической декомпозиции.....	39
---	----

4.1. <i>Свойство однозначности \circ-разложения</i>	39
--	----

4.2. <i>Свойство однозначности канонической декомпозиции</i>	43
--	----

4.3. <i>Неразделимые n-квазигруппы</i>	45
---	----

Глава 2

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ БЕСПОВТОРНОЙ СУПЕРПОЗИЦИИ	50
--	----

§ 1. Матричный подход к получению различных способов задания функций.....	50
---	----

§2.	Матрица коэффициентов функции и ее свойства.....	54
§ 3.	Локальное вычисление параметров неповторной суперпозиции функций.....	57
§ 4.	Конечные производные и степень нелинейности функции p^m -значной логики	59
	4.1. <i>Случай произвольных абелевых групп</i>	59
	4.2. <i>Случай функций над конечным полем</i>	62
	4.3. <i>Случай функций над кольцом вычетов</i>	65

Глава 3

ГРУППЫ ИНЕРЦИИ БЕСПОВТОРНОЙ СУПЕРПОЗИЦИИ

§ 1.	Группы автотопий неповторной суперпозиции.....	69
	1.1. <i>Общий случай</i>	69
	1.2. <i>Вполне приводимые сильно зависимые функции</i>	71
§ 2.	Группы автострофий неповторной суперпозиции	73
	2.1. <i>Общий случай</i>	73
	2.2. <i>Группы автострофий *-разложимых функций</i>	75
§ 3.	Вычисление групп инерции p^m -значных функций в группе сдвигов	79
	3.1. <i>Решение систем p-линейных уравнений</i>	80
	3.2. <i>Расширения группы инерции</i>	81
	3.3. <i>Метод нахождения групп инерции</i>	82

Глава 4

ГРУППЫ ИНЕРЦИИ ДВОИЧНЫХ ФУНКЦИЙ В ОБОБЩЕННЫХ ЛИНЕЙНОЙ И АФФИННОЙ

ГРУППАХ.....

§ 1.	Основные определения.....	86
	1.1. <i>Определение используемых групп преобразований</i>	86
	1.2. <i>Сопряженное пространство</i>	88
	1.3. <i>Производные по направлению</i>	90
	1.4. <i>Подпространство существенных переменных</i>	91
	1.5. <i>Аффинные сомножители</i>	93
	1.6. <i>Ограничения функций на линейные многообразия</i>	96
	1.7. <i>Инварианты групп</i>	99

§ 2.	Методы нахождения групп инерции.....	103
2.1.	Методы нахождения групп инерции в линейной и аффинной группах.....	103
2.2.	Методы нахождения групп инерции в обобщенных линейной и аффинной группах.....	109
§ 3.	Группы инерции линейной декомпозиции.....	116
3.1.	Выделение несущественных переменных.....	116
3.2.	Выделение аффинных сомножителей.....	117
3.3.	Простая декомпозиция.....	119
3.4.	Итеративная декомпозиция функций.....	125
3.5.	Бесповторная сумма функций.....	128
3.6.	Бесповторное произведение функций.....	134
3.7.	Однозначность разложения в произведение.....	139
3.8.	Использование дополнительной информации.....	148

Глава 5

МЕТОДЫ АФФИННОЙ И ЛИНЕЙНОЙ

КЛАССИФИКАЦИИ ДВОИЧНЫХ ФУНКЦИЙ..... 151

§ 1.	Задача классификации функций.....	151
1.1.	Понятие классификации.....	151
1.2.	Приложения классификации.....	151
1.3.	Известные классификации.....	152
§ 2.	Методы получения классификаций.....	155
2.1.	Поиск представителей классов эквивалентности.....	155
2.2.	Распознавание эквивалентности функций.....	160
2.3.	Поиск преобразования, переводящего одну функцию в другую.....	165

Глава 6

КЛАССИФИКАЦИЯ ФУНКЦИЙ..... 168

§ 1.	Классификация квадратичных форм.....	168
1.1.	Билинейные знакопеременные формы.....	168
1.2.	Симплектическая группа.....	170
1.3.	Квадратичные формы над $\mathbf{GF}(2^m)$	171
1.4.	Квадратичные формы над $\mathbf{GF}(2)$	172

1.5. Квадратичные формы над полем нечетного порядка.....	177
§ 2. Классификация однородных кубических форм.....	178
2.1. Кубические формы от шести переменных.....	178
2.2. Кубические формы от семи переменных.....	181
2.3. Кубические формы от восьми переменных.....	186
2.4. Кубические формы от девяти переменных.....	210
§ 3. Классификация однородных форм четвертой степени от восьми переменных.....	211
§ 4. Классификация функций от пяти переменных.....	212
4.1. Аффинная классификация.....	212
4.2. Линейная классификация.....	213
§ 5. Классификация функций от шести переменных.....	217
5.1. Классификация функций от шести переменных относительно группы $GL(6, 2)\mathcal{U}_3$	218
5.2. Классификация функций четвертой степени относительно группы $GL(6, 2)\mathcal{U}_2$	220
5.3. Классификация функций третьей степени относительно группы $GL(6, 2)\mathcal{U}_1$	224
5.4. Классификация функций от шести переменных относительно группы $GL(6, 2)\mathcal{U}_2$	228
§ 6. Классификация функций от семи переменных.....	230
6.1. Классификация функций третьей степени относительно группы $AGL(7, 2)\mathcal{U}_1$	230

Глава 7

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ КЛАССОВ И АСИМПТОТИКА..... 234

§ 1. Перечисление классов эквивалентности.....	234
1.1. Теория Пойа—де Брейна.....	234
1.2. Перечисление классов эквивалентности для групп сдвигов и перестановок переменных.....	243
1.3. Перечисление классов эквивалентности для полной линейной и аффинной групп.....	245
1.4. Перечисление классов эквивалентности для обобщенных линейной и аффинной групп.....	253
1.5. Перечисление классов эквивалентности форм из факторпространств $\mathcal{U}_k/\mathcal{U}_s$, $-1 \leq s < k \leq n$	257

§ 2. Асимптотические оценки числа классов эквивалентности.....	261
2.1. Обобщенная группа сдвигов.....	262
2.2. Обобщенная аффинная группа.....	264
2.3. Бинарные квазигруппы.....	266

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	270
--------------------------------------	------------

СПИСОК ТЕРМИНОВ.....	281
-----------------------------	------------