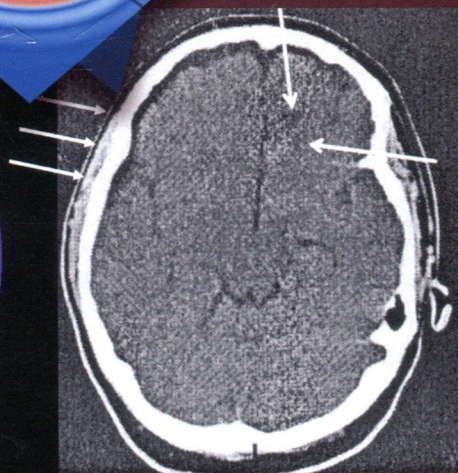
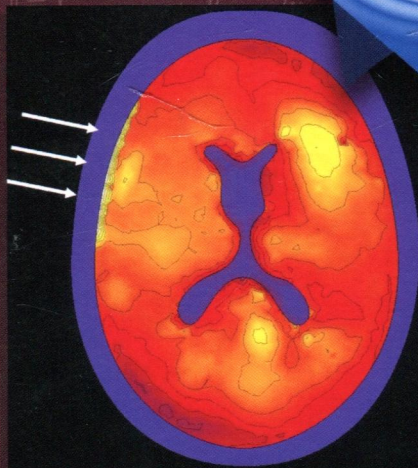


И. Б. ПЕТРОВ

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ФИЗИКОВ



И. Б. ПЕТРОВ

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ  
МАТЕМАТИКА  
ДЛЯ ФИЗИКОВ**



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2021

УДК 519.63 (075.8)

ББК 22.19я73

П 30

Петров И.Б. **Вычислительная математика для физиков.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2021. — 376 с. — ISBN 978-5-9221-1887-3.

Рассматриваются вычислительные методы решения задач физики (в частности, механики, в том числе механики сплошных сред), а также различных прикладных задач. В книгу включены элементы функционального анализа, методы точных решений разностных уравнений, вопросы теоретического минимума по вычислительной математике для физиков и задачи для вычислительного практикума.

Для студентов университетов (факультетов физико-математического профиля) и технических вузов.

ISBN 978-5-9221-1887-3

© ФИЗМАТЛИТ, 2021

© И. Б. Петров, 2021

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	7
<b>Глава 1. Введение в предмет вычислительной математики</b> . . . . .	9
1.1. Из истории вычислительной математики . . . . .	9
1.2. Вычислительный эксперимент. Высокопроизводительные вычисления . . . . .	13
1.3. Особенности вычислительной математики . . . . .	18
Список литературы . . . . .	22
<b>Глава 2. Необходимые сведения из функционального анализа</b> . . . . .	25
2.1. Метрические пространства . . . . .	25
2.2. Примеры метрических пространств . . . . .	26
2.3. Линейные пространства . . . . .	28
2.4. Примеры линейных пространств . . . . .	29
2.5. Линейные нормированные пространства . . . . .	30
2.6. Банаховы и гильбертовы пространства . . . . .	33
2.7. Линейные операторы . . . . .	34
2.8. Операторы в гильбертовом пространстве . . . . .	37
2.9. Операторные уравнения . . . . .	38
2.10. Производные Гато и Фреше . . . . .	39
2.11. Корректность задачи . . . . .	40
Список литературы . . . . .	41
<b>Глава 3. Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)</b> . . . . .	42
3.1. Число обусловленности СЛАУ . . . . .	42
3.2. Обусловленность СЛАУ . . . . .	45
3.3. Прямые методы численного решения СЛАУ . . . . .	47
3.4. Метод простых итераций (МПИ) . . . . .	51
3.5. Сходимость итерационного процесса . . . . .	53
3.6. Итерационные вариационные методы последовательных приближений (итераций) численного решения СЛАУ . . . . .	58
Список литературы . . . . .	62
<b>Глава 4. Приближение функций (аппроксимация функций в функциональных пространствах). Метод наименьших квадратов (МНК)</b> . . . . .	64
4.1. Постановка задачи . . . . .	64
4.2. Существование и единственность полинома наилучшего приближения . . . . .	66

4.3. Сходимость полинома наилучшего приближения . . . . .	69
4.4. Полиномы Бернштейна . . . . .	70
4.5. Аппроксимация тригонометрическими полиномами . . . . .	72
4.6. Метод наименьших квадратов . . . . .	72
Список литературы . . . . .	78
<b>Глава 5. Численные методы решения нелинейных алгебраических уравнений . . . . .</b>	<b>79</b>
5.1. Введение . . . . .	79
5.2. Неподвижная точка отображения, сжимающий оператор . . . . .	80
5.3. Метод простых итераций (МПИ) . . . . .	82
5.4. Метод Ньютона . . . . .	85
Список литературы . . . . .	93
<b>Глава 6. Методы интерполяции функций . . . . .</b>	<b>94</b>
6.1. Постановка задачи . . . . .	94
6.2. Интерполяционный полином в форме Лагранжа . . . . .	95
6.3. Интерполяционный полином в форме Ньютона . . . . .	98
6.4. Конечные разности . . . . .	100
6.5. Погрешность интерполяции . . . . .	101
6.6. Минимизация погрешности интерполяционного процесса . . . . .	105
6.7. Сходимость интерполяционного процесса . . . . .	106
6.8. Другие виды интерполяции . . . . .	109
6.9. Многомерная интерполяция . . . . .	110
6.10. Интерполяция с кратными узлами . . . . .	112
6.11. Кусочно-полиномиальная сплайн-интерполяция . . . . .	113
6.12. В-сплайны . . . . .	119
Список литературы . . . . .	121
<b>Глава 7. Численные методы интегрирования функций . . . . .</b>	<b>122</b>
7.1. Интерполяционные квадратурные формулы . . . . .	122
7.2. Квадратурные формулы Чебышёва, Гаусса, Гаусса–Кристоффеля . . . . .	128
7.3. Вычисления кратных интегралов . . . . .	137
7.4. Вычисления интегралов с особенностями . . . . .	138
7.5. Апостериорная практическая оценка погрешности квадратурных интерполяционных формул . . . . .	141
Список литературы . . . . .	143
<b>Глава 8. Численное решение задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) . . . . .</b>	<b>144</b>
8.1. Методы Рунге–Кутты (нежесткие задачи) . . . . .	144
8.2. Метод Рундсона . . . . .	154
8.3. Барьеры Бутчера . . . . .	156
Список литературы . . . . .	160

Глава 9. Численное решение задачи Коши для систем жестких обыкновенных дифференциальных уравнений . . . .	161
9.1. Понятие жестких систем ОДУ . . . . .	161
9.2. Устойчивость жестких систем ОДУ . . . . .	165
9.3. Нелинейные жесткие системы ОДУ . . . . .	168
9.4. Численные методы решения жестких систем ОДУ . . . . .	172
Список литературы . . . . .	181
Глава 10. Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . .	183
10.1. Метод фундаментальных систем . . . . .	183
10.2. Краевые задачи для уравнения второго порядка . . . . .	187
10.3. Метод прогонки . . . . .	190
10.4. Нелинейные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . .	195
10.5. Метод Фурье . . . . .	198
10.6. Методы Рунге и Галёркина . . . . .	200
Список литературы . . . . .	206
Глава 11. Точные решения разностных уравнений . . . . .	207
Список литературы . . . . .	217
Глава 12. Основные понятия теории разностных схем . . . . .	218
12.1. Сходимость, аппроксимация и устойчивость методов . . . . .	218
12.2. Построение разностных схем. Исследование на сходимость . . . . .	222
Список литературы . . . . .	238
Глава 13. Численные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа (уравнения диффузии, теплопроводности) . . . . .	239
13.1. Однородное линейное уравнение теплопроводности . . . . .	239
13.2. Нелинейное одномерное уравнение теплопроводности . . . . .	244
13.3. Методы расщепления для численного решения многомерных уравнений параболических типа . . . . .	247
Список литературы . . . . .	256
Глава 14. Численное решение дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа . . . . .	257
14.1. Двухслойные разностные схемы для численного решения линейного уравнения переноса . . . . .	257
14.2. Двухслойные разностные схемы для решения нелинейного уравнения переноса . . . . .	271
14.3. Трехслойные разностные схемы для решения уравнения переноса . . . . .	275

14.4. Разностные схемы для решения волнового уравнения и акустической системы . . . . .	277
14.5. Гибридные разностные схемы . . . . .	282
Список литературы . . . . .	289
<b>Глава 15. Разностные методы для численного решения уравнений эллиптического типа (уравнения электростатики, Лапласа, Пуассона) . . . . .</b>	<b>291</b>
15.1. Постановка задачи Дирихле для уравнения Пуассона . . . . .	291
15.2. Итерационные методы решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона . . . . .	295
Список литературы . . . . .	307
<b>Глава 16 (дополнительная). Математические модели механики сплошных сред (МСС) . . . . .</b>	<b>308</b>
16.1. Вывод уравнений механики сплошных сред . . . . .	308
16.2. Уравнения МСС в интегральной форме . . . . .	311
16.3. Система уравнений газовой динамики . . . . .	312
16.4. Уравнение Навье–Стокса, описывающее течение вязкой жидкости . . . . .	314
16.5. Система уравнений теории упругости . . . . .	315
16.6. Нестационарная модель динамики морских и океанических течений . . . . .	317
16.7. Уравнения магнитной гидродинамики (МГД) . . . . .	318
16.8. Система уравнений Прандтля ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости . . . . .	322
16.9. Система уравнений теории мелкой воды . . . . .	323
16.10. Система уравнений акустики . . . . .	324
16.11. Введение в разностные схемы газодинамики . . . . .	325
16.12. Уравнение бесстолкновительной плазмы (уравнение Власова) . . . . .	331
Список литературы . . . . .	333
<b>Приложение 1. Теоретические вопросы к курсу лекций по вычислительной математике (теоретический минимум) . . . . .</b>	<b>335</b>
<b>Приложение 2. Примеры задач к вычислительному практикуму по курсу . . . . .</b>	<b>352</b>