

Физико·  
Математическое  
Наследие

**ОСНОВЫ** **В. Ф. КАГАН**  
**ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ**  
**В ТЕНЗОРНОМ**  
**ИЗЛОЖЕНИИ**

**1**

- Аппарат исследования
- Общие основания теории и внутренняя геометрия поверхности



Математика

Дифференциальная геометрия



*Физико-математическое наследие: математика  
(дифференциальная геометрия)*

---

**В. Ф. Каган**

**ОСНОВЫ  
ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ  
В ТЕНЗОРНОМ ИЗЛОЖЕНИИ**

Часть первая

**Аппарат исследования**

•

**Общие основания теории  
и внутренняя  
геометрия поверхности**

Издание второе



**URSS**

**МОСКВА**

**Каган Вениамин Федорович**

**Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. 1: Аппарат исследования. Общие основания теории и внутренняя геометрия поверхности.** Изд. 2-е. — М.: ЛЕНАНД, 2021. — 512 с. (Физико-математическое наследие: математика (дифференциальная геометрия).)

Вниманию читателей предлагается классический фундаментальный труд выдающегося математика, основателя тензорной дифференциально-геометрической школы в СССР В. Ф. Кагана (1869–1953). В книге дается наиболее существенный материал дифференциальной геометрии поверхностей в современном автору построении, делается обстоятельное и в то же время доступное изложение тензорного аппарата в его применении к дифференциальной геометрии, а также излагаются результаты и достижения в этой области геометров Московского государственного университета.

Издание состоит из двух частей. В настоящей первой части изложены учение о линейных вектор-функциях, основы теории кривых в пространстве, тензорная алгебра и основанные на ней общие основания теории поверхностей; рассмотрены важнейшие типы поверхностей, начала тензорного анализа и внутренняя геометрия поверхностей. Вторая часть, содержащая геометрию в пространстве, отображение поверхностей (конформное, сферическое, геодезическое), учение об изгибании поверхностей, учение о сетях на поверхности и др., выходит одновременно с первой в нашем издательстве.

Книга рекомендуется математикам и физикам, преподавателям, аспирантам и студентам физико-математических факультетов высших учебных заведений.

*При редакционном участии Г. Б. Гуревича*

ООО «ЛЕНАНД». 117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 11А, стр. 11.  
Формат 70×100/16. Печ. л. 32. Зак. № 165268.

Отпечатано в АО «Т 8 Издательские Технологии».  
109316, Москва, Волгоградский проспект, д. 42, корп. 5.

ISBN 978–5–9710–8099–2

© ЛЕНАНД, 2021

29235 ID 265860



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## ГЛАВА ПЕРВАЯ

### МЁБИУСОВЫ ГРУППЫ НЕПРЕРЫВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Изометрические преобразования пространства . . . . .	19
1. Изоморфизмы и автоморфизмы в геометрии (19). 2. отображение пространства самого в себя или преобразование пространства (21). 3. Изометрическое преобразование пространства (22). 4. Обозначение суммирования по Эйнштейну (23). 5. Изометрия евклидова пространства как ортогональное преобразование (25).	
§ 2. Аффинные преобразования пространства. Аффиноры . . . . .	27
1. Аффинное преобразование пространства (27). 2. Основные свойства аффинных преобразований (29). 3. Группа аффинных преобразований (30). 4. Аффинные преобразования векторов. Аффиноры (32). 5. Основные свойства линейной вектор-функции (34). 6. Алгебра аффиноров (36). 7. Симметрический аффинор (38). 8. Неизменяемые направления аффинора (38). 9. Неизменяемые направления симметрического аффинора (39). 10. Аффинор деформации (41). 11. Инварианты геометрических образов по отношению к аффинору или аффинному преобразованию (41). 12. Инварианты аффинора (42). 13. Уравнения Гамильтона-Кэли (44).	
§ 3. Версоры. Движения и отражения . . . . .	45
1. Действие аффинного преобразования на триэдр (45). 2. Версор (47). 3. Неизменяемое направление версора (48). 4. Движения (49). 5. Отражения (50). 6. Группа подобия (51). 7. Аффинные преобразования евклидова пространства и геометрия аффинного пространства (51).	
§ 4. Изометрические и аффинные преобразования плоскости . . . . .	51
1. Аффинные преобразования и движения в плоскости (51). 2. Аффиноры в $E_2$ (53). 3. Симметрические аффиноры в $E_2$ (53). 4. Определение симметрического аффинора по его главным направлениям и собственным значениям (54). 5. Версоры в $E_2$ (55). 6. Инварианты аффинора и уравнение Гамильтона-Кэли в плоскости (55).	
§ 5. Дифференцирование и интегрирование линейных вектор-функций и аффиноров . . . . .	56
1. Дифференцирование и интегрирование линейных вектор-функций (56). 2. Система дифференциальных уравнений триэдра (56). 3. Дифференцирование и интегрирование аффинора (57).	
§ 6. Группа проективных преобразований . . . . .	58
1. Проективные преобразования пространства (58). 2. Коллинеации в евклидовой плоскости. Уравнения Шеффера (59). 3. Уравнения Шварца (60). 4. Интегрирование дифференциальных уравнений Шеффера (61). 5. Группа проективных преобразований плоскости (63). 6. Проективные преобразования пространства (65). 7. Группа автоморфизмов множества всех векторов (66).	

- § 7. Гру на сферических преобразованиях . . . . . 67
1. Преобразования подобия и инверсии (67). 2. Пентасферические координаты в  $E_3$  (68). 3. Сферические преобразования пространства и лоренцовы преобразования координат (69). 4. Уравнения сферического преобразования в исходных пентасферических координатах (71). 5. Разложение сферического преобразования (72). 6. Конформность сферического преобразования (74).

## ГЛАВА ВТОРАЯ

## ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ

- § 8. Инварианты пространственной кривой. Уравнения Френе-Серре . . . . 76
1. Кривая; касательная и ней; касательный и тангенциальный вектор (76). 2. Главный нормальный вектор. Кривизна кривой в заданной её точке (78). 3. Бинормальный вектор; основной триадр кривой (80). 4. Кручение кривой в данной её точке. Формулы Френе-Серре (81). 5. Вектор Пуассона-Дарбу. Вторая форма уравнений Френе-Серре (84). 6. Вхождение кривой в основной триадр (85).
- § 9. Интегрирование уравнений Френе-Серре и некоторые их приложения . . 87
1. Интегрирование уравнений Френе-Серре (87). 2. Афинор основного триадра (89). 3. Винтовые линии (91). 4. Разложение радиуса-вектора кривой по степеням лонгального параметра (93). 5. Соприкасающаяся сфера в данной точке кривой (94). 6. Сферические кривые. Натуральные уравнения сферической кривой (95).

## ГЛАВА ТРЕТЬЯ

## КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ НА ПОВЕРХНОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

- § 10. Криволинейные координаты на поверхности . . . . . 97
1. Различные способы аналитического выражения поверхности (97). 2. Условие независимости параметров (98). 3. Поверхность; обыкновенные и особые её точки (99). 4. Криволинейные координаты на поверхности (100). 5. Чебышевская, лучебышевская сеть и лонгальные координаты (102). 6. Аффинные координаты на евклидовой плоскости (103). 7. Кривые на поверхности; векторы, принадлежащие поверхности, и нормальные к ней (103). 8. Географические и эквистантные координаты на сфере (104). 9. Стереографические координаты на сфере (106). 10. Бельтрамиевы координаты на сфере (109).
- § 11. Криволинейные координаты в пространстве . . . . . 111
1. Криволинейные координаты в  $E_3$  (111). 2. Стереографические координаты в пространстве (112). 3. Эллиптические координаты в пространстве (113). 4. Эллиптические координаты на центральной поверхности 2-го порядка (116). 5. Координация пространства, нормально связанная с координацией поверхности (119).
- § 12. Контравариантные и ковариантные компоненты вектора в пространстве и на поверхности . . . . . 120
1. Контравариантные компоненты вектора (120). 2. Преобразование контравариантных компонент вектора при преобразовании координат (121). 3. Символика Скоутена и Стройна (122). 4. Ковариантные компоненты вектора (124). 5. Другие выражения ковариантных и контравариантных компонент вектора (124). 6. Ковариантные и контравариантные векторы (127). 7. Преобразование контравариантных компонент вектора в ковариантные и обратно. Вертор (128). 8. Дискриминант вертора (129). 9. Векторы на поверхности (130). 10. Сводка результатов, относящихся к координации точек и векторов на поверхности (132).

## ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

## НАЧАЛА ТЕНЗОРНОЙ АЛГЕБРЫ

- § 13. Линейная алгебра тензоров . . . . . 134
1. Эйнстемсы (134). 2. Тензоры (135). 3. Мультипликативные тензоры (137). 4. Смешанные тензоры (137). 5. Конструирование тензора (138). 6. Тензор Кронекера (139). 7. Линейная алгебра тензоров (140). 8. Изомеры. Симметрические и нососимметрические тензоры (140).
- § 14. Умножение и свёртывание тензоров . . . . . 143
1. Перемножение тензоров (143). 2. Свёртывание тензора (143). 3. Свёртывание двух тензоров (145). 4. Обращение основной теоремы о свёртывании тензоров (146). 5. Тензоры 2-ой валентности (147). 6. Векторы (148). 7. Векторы  $g_{ij}$  и  $\gamma_{ij}$  (149). 8. Различные типы компонент тензора (149). 9. Смещение индексов в компонентах эйнстемсы (150). 10. Перенесение дифференциального множителя (151). 11. Тензоры некоторой группы преобразований (152).
- § 15. Инварианты тензоров . . . . . 153
1. Инерция свёртывания (153). 2. Инварианты двух тензоров (153). 3. Скалярное произведение двух векторов (154). 4. Выражение скалярного произведения двух тензоров 1-й валентности (векторов) в однотипных координатах (155). 5. Дифференциальные инварианты скалярных функций (155). 6. Дифференциалы (156). 7. Относительные инварианты (157). 8. Преобразование дискриминанта тензора 2-й валентности к новым переменным (158). 9. Абсолютные инварианты, получаемые из относительных (159). 10. Инвариантные дифференциальные формы (160).
- § 16. Бивекторы в бинарной области . . . . . 161
1. Бивекторы (161). 2. Дискриминантный тензор (162). 3. Нососимметрические тензоры высшей валентности в бинарной области (163). 4. Общее выражение бивектора в бинарной области (164). 5. Двойные бивекторы (164). 6. Дублированный бивектор (166). 7. Выражение определителя и его миноров с помощью дискриминантного тензора (167).

## ГЛАВА ПЯТАЯ

## МЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА ПОВЕРХНОСТИ

- § 17. Метрика в пространстве и на поверхности . . . . . 170
1. Метрическая дифференциальная форма пространства и поверхности (170). 2. Метрическая форма сферы в стереографических координатах (172). 3. Метрическая форма сферы в бельтрамиевых координатах (173). 4. Метрическая форма центральной поверхности 2-го порядка в эллиптических координатах (173). 5. Метрическая форма центральной поверхности 2-го порядка в лиувилевых координатах. Поверхности Лиувилля (174). 6. Метрика в пространстве (175). 7. Метрика на поверхности (176). 8. Поверхности, имеющие общую метрическую форму (180).
- § 18. Редукция бинарной квадратичной дифференциальной формы . . . . . 181
1. Задача редукции квадратичной дифференциальной формы (181). 2. Приведение квадратичной дифференциальной формы к ортогональному виду (181). 3. Приведение квадратичной бинарной формы к каноническому виду (183).
- § 19. Иммерсия положительной бинарной дифференциальной формы . . . . . 185
1. Первая задача иммерсии (185). 2. Необходимое условие возможности иммерсии  $f_2$  в  $E_3$  (185). 3. Достаточность установленного условия (186). 4. Классификация дифференциальных квадратичных форм (187). 5. Нормальная система дифференциальных уравнений в частных производных (187). 6. Вторая задача иммерсии (188). 7. Отображение, деформация и изгибание поверхностей (191). 8. Наложение (развёртывание) одной поверхности на другую (193).

## ГЛАВА ШЕСТАЯ

## ОБЩИЕ ОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

- § 20. Три основные формы поверхности и их инварианты . . . . . 195
1. Метрическая форма пространства  $E_3$  в координатах, нормально связанных с координатой поверхности (195). 2. Три основные формы поверхности (196). 3. Два тождества (198). 4. Геометрическое истолкование второй и третьей основных форм (199). 5. Основные формы плоскости и сферы (200). 6. Инварианты дифференциальных форм поверхности (201). 7. Первый и второй инварианты всякого тензора (203). 8. Формулы Вейнгартена (204). 9. Зависимость между тремя основными формами (205).
- § 21. Кривые на поверхности. Вектор Родрига . . . . . 206
1. Основной триэдър кривой на поверхности (206). 2. Дериwационные уравнения (207). 3. Три кривизны кривой на поверхности. Геодезические линии поверхности (208). 4. Поверхностные полосы (210). 5. Вектор Родрига (211). 6. Кривизны  $\tilde{\sigma}$  и  $\tilde{\tau}$  поверхности в данном направлении (212). 7. Другие выражения инвариантов  $\tilde{\sigma}$  и  $\tilde{\tau}$  (213). 8. Четwёртая основная форма поверхности (214). 9. Развитие формул Вейнгартена (215).
- § 22. Первый основной афинор поверхности и главные направления в каждой её точке . . . . . 216
1. Афинор поверхности (216). 2. Афинор Бурали-Форти и главные направления в данной точке поверхности (217). 3. Уравнение Гамильтона-Кэли (218). 4. Эйлерова разность (220). 5. Основной афинор, отнесённый к главным направлениям поверхности (221). 6. Формула Эйлера (224). 7. Формула Менье (224). 8. Выражение дискриминанта четwёртой основной формы (226).
- § 23. Асимптотические направления в точке поверхности и второй основной афинор . . . . . 228
1. Сопряжённые направления в данной точке поверхности (226). 2. Асимптотические направления в данной точке поверхности (227). 3. Другой геометрический признак асимптотических направлений (230). 4. Второй афинор поверхности (231). 5. Уравнение Гамильтона-Кэли для второго афинора (232).
24. Асимптотические линии и линии кривизны поверхности . . . . . 233
1. Асимптотические линии поверхности (233). 2. Основные свойства асимптотических линий (234). 3. Линии кривизны поверхности (235). 4. Теорема Дюпена (236). 5. Некоторые общие соображения (237).
- § 25. Якобиан двух тензоров . . . . . 237
1. Структура 4-го основного тензора (237). 2. Якобиев тензор, составленный из двух данных тензоров (239). 3. Четwёртый основной тензор поверхности как якобиан первых двух тензоров (239).
- § 26. Воздействие Мёбиусовых преобразований пространства на основные формы поверхности . . . . . 242
1. Воздействие на основные формы поверхности преобразований подобия (242). 2. Воздействие на основные формы поверхности конформного преобразования пространства (243). 3. Группы автоморфизмов асимптотических линий и линий кривизны (246).
- § 27. Соприкосновение поверхностей . . . . . 246
1. Поверхность, приведённая в нормальное сопряжение с одной из своих касательных плоскостей (246). 2. Порядок взаимного касания двух поверхностей (248). 3. Сопринасающиеся поверхности (249). 4. Приведение поверхностей в сопряжение (250). 5. Сопринасающаяся сфера (251). 6. Инвариантность омбилических точек поверхности при конформном преобразовании пространства (251).

ГЛАВА СЕДЬМАЯ  
ПРОСТЕЙШИЕ ТИПЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ

- § 28. Поверхности вращения . . . . . 252
1. Поверхность вращения (252). 2. Метрическая форма поверхности вращения (253). 3. Катеноид (256). 4. Вторая и третья основные формы поверхности вращения (257). 5. Кривизны катеноида (258). 6. Тор (259). 7. Омбилические точки поверхности вращения (260). 8. Асимптотические линии поверхности вращения (261). 9. Поверхности, имеющие больше одной оси вращения (262). 10. Группа автоморфизмов совокупности поверхностей вращения (263).
- § 29. Линейчатые поверхности . . . . . 264
1. Линейчатая поверхность (264). 2. Изменение направляющей (264). 3. Касательная плоскость и нормаль линейчатой поверхности (265). 4. Стрикционная линия линейчатой поверхности (267). 5. Первая основная форма и особые точки линейчатой поверхности (269). 6. Параметр распределения (270).
- § 30. Торсы (линейчатые поверхности, развёртывающиеся на плоскость) . . . 272
1. Торс (272). 2. Классификация торсов (273). 3. Особые точки торса (274). 4. Ребро возврата торса (275). 5. Торс как огибающая движущейся плоскости (276). 6. Линейчатые поверхности, образуемые рёбрами основного триэдра пространственной кривой (279). 7. Торсы, огибающие грани основного триэдра кривой (280). 8. Поверхности, развёртывающиеся на плоскость (281). 9. Поверхность нормали и линии кривизмы поверхности (283). 10. Минимальный торс (284). 11. Линейчатая поверхность вращения (284). 12. Средняя кривизна торса (285). 13. Группа автоморфизмов линейчатых поверхностей (286).
- § 31. Поверхности Каталана . . . . . 287
1. Линейчатая поверхность с направляющей плоскостью (287). 2. Катеноид (289). 3. Геликоид (291). 4. Основные формы геликоида (292). 5. Асимптотические линии и линии кривизмы геликоида (293). 6. Теорема Каталана (294). 7. Обобщение понятия о винтовой поверхности (295).
- § 32. Поверхности переноса . . . . . 296
1. Преобразование С. Ли (296). 2. Поверхность переноса (297). 3. Основные формы поверхности переноса (298). 4. Построение поверхностей переноса, указанное С. Ли (299). 5. Автоморфизмы совокупности поверхностей переноса (301). 6. Обобщение понятия о поверхности переноса (301).
- § 33. Параллельные поверхности . . . . . 302
1. Семейство параллельных поверхностей (302). 2. Особые точки на параллельных поверхностях (303). 3. Эволюта поверхности (303). 4. Эволюта поверхности вращения (304). 5. Соотношения между кривизнами параллельных поверхностей в соответствующих точках (305). 6. Эволюта параллельных поверхностей (306). 7. Средняя поверхность эволюты (307). 8. Связь между четвёртыми основными тензорами на параллельных поверхностях (308). 9. Векторы главных направлений поверхности (310). 10. Эволюта как огибающая главных плоскостей поверхности (312). 11. Поверхности Монжа (313). 12. Построение монжевых поверхностей (314). 13. Каналовые, трубчатые поверхности; циклиды (315).
- § 34. Минимальные поверхности . . . . . 316
1. Обзор уже рассмотренных минимальных поверхностей (316). 2. Вариационные свойства минимальных поверхностей (317). 3. Выражение площади части минимальной поверхности, ограниченной жордановой кривой (319). 4. Интегральный признак минимальной поверхности (320). 5. Дифференциальное уравнение минимальной поверхности. Задача Плато (321). 6. Элементы, определяющие минимальную поверхность (322). 7. Гауссова кривизна минимальной поверхности (323). 8. Асимптотические линии минимальной поверхности (323). 9. Автоморфизмы дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений (325). 10. Автоморфизмы множества минимальных поверхностей (325).



## ГЛАВА ВОСЬМАЯ

## НАЧАЛА ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

- § 35. Параллельное перенесение вектора в пространстве и в плоскости . . . . . 323
1. Поле равных векторов (328). 2. Дифференциальные уравнения постоянного векторного поля в пространстве  $E_3$  (328). 3. Хриstoffeли первого и второго рода; их выражения в компонентах основного тензора (329). 4. Дифференциальные уравнения параллельного перенесения вектора в пространстве. Условия их интегрируемости (330). 5. Бесконечно малое смещение вектора (332). 6. Параллельное перенесение в плоскости (333).
- § 36. Риманов тензор . . . . . 334
1. Экстенсивы различных типов; девиация (334). 2. Преобразование хриstoffeлей (335). 3. Геометрический объект (336). 4. Вспомогательные теоремы (337). 5. Тензор Римана-Хриstoffeля (338). 6. Задача Лама-Хриstoffeля (340). 7. Ковариантные компоненты риманова тензора (342).
- § 37. Экстенсив Хриstoffeля и основная теорема Гаусса . . . . . 348
1. Хриstoffeли в бинарной области (343). 2. Хриstoffeлев экстенсив сферы (345). 3. Хриstoffeли поверхности Лиувилля (346). 4. Риманов тензор поверхности (346). 5. Основная теорема Гаусса (348). 6. Формулы Бианки (348). 7. Тензор Риччи (349). 8. Формула Фосса-Вейля (349). 9. Другие выражения гауссовой кривизны поверхности через компоненты его метрического тензора (350).
- § 38. Ковариантное дифференцирование вектора (тензора первой валентности) . . . . . 351
1. Инвариантный признак постоянного векторного поля в  $E_3$  и в  $E_2$  (351). 2. Ковариантная производная вектора (тензора первой валентности) (352). 3. Другое выражение условий, характеризующих постоянное векторное поле в  $E_3$  или в  $E_2$  (355). 4. Ковариантная производная вектора (тензора первой валентности), заданного своими контравариантными компонентами (356). 5. Абсолютный дифференциал вектора (357). 6. Производная вектора в пространстве  $E_3$  или на плоскости  $E_2$ , взятая в данном направлении (357). 7. Ротация векторного поля (358).
- § 39. Ковариантные производные тензоров . . . . . 358
1. Ковариантная производная тензора 2-й валентности (358). 2. Ковариантная производная метрического и дискриминантного тензоров (361). 3. Ковариантная производная смешанного тензора 2-й валентности (362). 4. Тожество Риччи (363). 5. Ковариантные производные тензора любой валентности (365).
- § 40. Тензоры с векторными компонентами . . . . . 366
1. Экстенсивы с векторными компонентами (366). 2. Тензоры с векторными компонентами (366). 3. Перемножение тензоров с векторными компонентами (368). 4. Дискриминантный тензор (369). 5. Ротор вектора (370). 6. Ковариантная производная тензора с векторными компонентами (370). 7. Градиент векторного поля и связанные с ним соотношения (372). 8. Дериационные формулы Гаусса (373).

## ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

## ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТИ

- § 41. Параллельное перенесение вектора по поверхности (геометрическая теория) . . . . . 375
1. Определение параллельного перенесения вектора по поверхности в бесконечно близкую точку (375). 2. Параллельное перенесение вектора по поверхности вдоль заданной на ней кривой (376). 3. Отгибание вектора от репера при бесконечно малом перенесении (377). 4. Параллельное перенесение по поверхности цилиндра (378). 5. Параллельное перенесение по поверхности конуса (379). 6. Абсолютный параллелизм (380). 7. Параллельное перенесение на тангенциальном торсе (381). 8. Параллельное перенесение вектора по сфере (382).

**§ 42. Параллельное перенесение вектора по поверхности (аналитическая теория) 383**

1. Приращения, которые получают компоненты вектора при параллельном его перенесении по поверхности в бесконечно близкую точку (383). 2. Дифференциальные уравнения, определяющие параллельное перенесение вектора по поверхности вдоль заданной на ней кривой (384). 3. Абсолютный дифференциал вектора, зависящего от одного параметра (386). 4. Абсолютный или неабсолютный параллелизм векторов на поверхности (386). 5. Дифференциальные уравнения параллельного перенесения вектора, заданного ковариантными компонентами (387). 6. Инварианты параллельного перенесения (388). 7. Внутренняя геометрия поверхности (389).

**§ 43. Теорема Леви-Чивита о гауссовой кривизне поверхности . . . . . 389**

1. Развитие основных формул параллельного перенесения (389). 2. Приращение компонент вектора при обходе бесконечно малого контура (391). 3. Отклонение вектора при обходе бесконечно малого контура (393). 4. Основная теорема Леви-Чивита (394). 5. Распространение формулы Леви-Чивита на конечный контур (395).

**§ 44. Геодезическая кривизна кривой на поверхности . . . . . 397**

1. Дифференцирование вектора по поверхности (397). 2. Вектор кривизны и геодезическая кривизна кривой на поверхности (399). 3. Отклонение вектора при параллельном его перенесении по поверхности (401). 4. Вычисление геодезической кривизны (402). 5. Формулы Френе-Серре на поверхности (404). 6. Интегрирование уравнений Френе-Серре на поверхности (404). 7. Геодезическая кривизна параметрических линий (405). 8. Теорема Оссиана Бонне (407). 9. Вычисление геодезической кривизны некоторых простейших кривых на поверхности (409). 10. Полная кривизна замкнутой односвязной поверхности (410).

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

**ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ НА ПОВЕРХНОСТИ**

**§ 45. Геодезические линии поверхности . . . . . 412**

1. Непосредственное разыскание геодезических линий поверхности (412). 2. Дифференциальные уравнения геодезических линий (413). 3. Интегрирование дифференциальных уравнений геодезических линий (415). 4. Интегрирование дифференциальных уравнений геодезических линий на сфере (419). 5. Единое дифференциальное уравнение второго порядка геодезических линий (421). 6. Вариационное определение геодезических линий. Эйлеров вектор. (422). 7. Кратчайшие линии поверхности (424). 8. Определение геодезических линий поверхности средствами, внешними относительно поверхности (426).

**§ 46. Задача о движении материальной точки по удерживающей гладкой поверхности . . . . . 427**

1. Уравнения Лагранжа (427). 2. Уравнения Уиттекера (428). 3. Движение материальной точки по удерживающей гладкой поверхности при отсутствии внешних сил (429). 4. Принцип Гамильтона (430).

**§ 47. Геодезические и нормальные координаты на поверхности . . . . . 431**

1. Геодезические координаты (431). 2. Геодезические координаты в данной точке поверхности (434). 3. Нормальные координаты на поверхности (436). 4. Преобразование любых координат в нормальные (437). 5. Преобразование одних нормальных координат в другие (438). 6. Геодезические линии через две точки поверхности (439). 7. Нормальные координаты на плоскости и на сфере (440). 8. Основные соотношения в нормальной координатной (441). 9. Римановы координаты на поверхности (442).

**§ 48. Полугеодезические (полярные, параллельные и декартовы) координаты на поверхности . . . . . 445**

1. Угол между радиусом-вектором кривой и её направлением (445). 2. Геодезическая окружность (445). 3. Полярные координаты на поверхности (446). 4. Эвидистантное отображение поверхности на плоскость;

общее выражение нормальных координат поверхности (447). 5. Метрическая форма в римановых координатах (447). 6. Геодезическая, как кратчайшая линия между двумя точками на поверхности (448). 7. Параллельные и декартовы координаты на поверхности (449).

§ 49. Геодезические линии на поверхностях вращения . . . . . 451

1. Уравнение Гаусса (451). 2. Уравнение Клеро (452). 3. Геодезические линии на поверхностях вращения (454). 4. Геодезические линии на круглом конусе (456). 5. Геодезические линии на однополостном гиперболоиде вращения (457). 6. Геодезические линии на эллипсоиде вращения (461). 7. Геодезические линии на торе (463).

§ 50. Дифференциальные инварианты Бельтрами и изотермические координаты на поверхности . . . . . 466

1. Первый дифференциальный инвариант Бельтрами (466). 2. Выражение метрической формы поверхности через дифференциальные инварианты координат; геометрический смысл первого дифференциального инварианта (468). 3. Бельтрамиев дифференциальный инвариант вектора (469). 4. Второй бельтрамиев инвариант скалярной функции (470). 5. Выражение геодезической кривизны кривой в бельтрамиевых инвариантах (471). 6. Изотермические функции поверхности (472). 7. Изотермическая сеть (474). 8. Изотермическая сеть поверхности, развёртывающаяся на поверхность вращения (475). 9. Метрическая форма поверхности, отнесённая к изотермической координатной сети; изотермические координаты (476). 10. Приведение метрической формы поверхности к изотермическому виду (477). 11. Дивергенция вектора (479).

§ 51. Геодезические линии на поверхностях Лиувилля . . . . . 480

1. Уравнения геодезических линий на поверхностях Лиувилля (480). 2. Применение к поверхностям вращения (482). 3. Уравнение геодезических линий на трёхосном эллипсоиде (483). 4. Типы геодезических линий на эллипсоиде (484). 5. Геодезические линии на эллипсоиде, проходящие через его круговые (омбилические) точки (486). 6. Выражение элемента длины на эллипсоиде в некоторых специальных случаях (487). 7. Геодезические эллипсы и гиперболы на эллипсоиде (489).

Содержание второй части . . . . . 492

Литература . . . . . 498

Именной указатель . . . . . 506

Предметный указатель . . . . . 507