

**В.И. Колесников**  
**О.А. Беляк**

---

---

---

---

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ  
И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ  
ИССЛЕДОВАНИЯ —  
ОСНОВА КОНСТРУИРОВАНИЯ  
Г Е Т Е Р О Г Е Н Н Ы Х  
А Н Т И Ф Р И К Ц И О Н Н Ы Х  
М А Т Е Р И А Л О В**

---

---

---

---



В.И. Колесников  
О.А. Беляк

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ  
И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ  
ИССЛЕДОВАНИЯ —  
ОСНОВА КОНСТРУИРОВАНИЯ  
**Г Е Т Е Р О Г Е Н Н Ы Х**  
**АНТИФРИКЦИОННЫХ**  
**М А Т Е Р И А Л О В**



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2021

УДК 539.3:531.43  
ББК 22.253  
К 60



*Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 21-11-00004, не подлежит продаже*

Колесников В.И., Беляк О.А. **Математические модели и экспериментальные исследования — основа конструирования гетерогенных антифрикционных материалов.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2021. — 216 с. — ISBN 978-5-9221-1916-0.

Монография посвящена исследованию теоретических и экспериментальных закономерностей, возникающих при динамических и квазистатических воздействиях на гетерогенные антифрикционные композиционные материалы. Теоретические исследования проведены на основе модельных задач, решения которых построены развитием подходов, применяемых для решения смешанных задач теории упругости, контактных задач в динамической и квазистатической постановке для оснований, снабженных микроструктурой. Теоретические выводы подтверждены натурными экспериментами, выполненными современными средствами и методами, а также результатами, полученными в рамках других моделей. При этом микроструктура гетерогенных сред с дискретными и непрерывными фазами была учтена в рамках моделей микромеханики и Био–Френкеля. Также рассматриваются вопросы неразрушающего контроля идентификации дефектов в форме полостей в анизотропных многофазных средах.

Книга адресована научным и инженерно-техническим работникам, аспирантам, специализирующимся в области теории упругости, механики контактных взаимодействий, механики сплошных сред, экспериментальной механики, материаловедения, трибологии.

#### Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, академик РАН *В. А. Бабешко*;

д-р физ.-мат. наук, проф. *Б. М. Лагутин*

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	6
Глава 1. Технологии конструирования и экспериментальное изучение трибологических и механических свойств полимерных композитов . . . . .	14
1.1. Технология изготовления полимерных гетерогенных композитов с наноразмерными составляющими . . . . .	15
1.2. Микроскопические и макроскопические исследования структуры композитов на основе фенилона . . . . .	21
1.3. Оборудование и методы исследования трибологических характеристик композиционных материалов . . . . .	29
Глава 2. Математические модели, описывающие микроструктуру гетерогенных сред . . . . .	34
2.1. Определение эффективных модулей гетерогенных сред методами микромеханики . . . . .	34
2.1.1. Влияние различных форм объемных включений и их ориентации на эффективные модули многофазных материалов. Комплексирование натуральных и численных экспериментов при нахождении эффективных модулей гетерогенных сред . . . . .	40
2.2. Математические модели, описывающие флюидосодержащие пористые среды, на основе систем дифференциальных уравнений в частных производных . . . . .	57
2.3. Моделирование насыщенных и частично насыщенных флюидом композитов и определение механических характеристик сред Био . . . . .	65
Глава 3. Контактные задачи при наличии сил трения, моделирующие напряженно-деформированное состояние гетерогенных композитов при вибрации . . . . .	68
3.1. Вибрация штампа при наличии трения на поверхности полупространства, обладающего микроструктурой . . . . .	68
3.1.1. Постановка задачи о вибрации штампа при наличии трения на поверхности полупространства, обладающего микроструктурой . . . . .	69
3.1.2. Построение матрицы Грина задачи об установившихся колебаниях полупространства, обладающего микроструктурой . . . . .	70
3.1.3. Сведение краевой задачи о колебаниях штампа на полуограниченном основании, при учете трения в области контакта, к интегральному уравнению. Свойства ядра интегрального уравнения . . . . .	74
3.1.4. Регуляризация и приближенное решение интегрального уравнения . . . . .	84

3.1.5. Численный анализ результатов решения задачи об установившихся колебаниях штампа на поверхности гетерогенного полупространства при учете трения в области контакта . . . .	89
3.1.6. О влиянии взаимодействия фаз и степени насыщенности гетерогенного основания на контактные давления при колебаниях штампа с учетом трения в области контакта . . . . .	97
3.2. Вибрация штампа при наличии трения на поверхности гетерогенного слоя . . . . .	105
3.2.1. Постановка задачи о вибрации штампа при наличии трения на поверхности гетерогенного слоя. Построение матрицы Грина . . . . .	105
3.2.2. Сведение краевой задачи о колебаниях на гетерогенном слое штампа (при наличии трения в области контакта) к интегральному уравнению. Свойства ядра интегрального уравнения . . . . .	111
3.2.3. Построение приближенного решения интегрального уравнения. Численный анализ результатов решения контактной задачи о колебаниях штампа на поверхности гетерогенного слоя при учете трения в области контакта . . . . .	117
3.3. Вибрация штампа с учетом трения в области контакта на поверхности гетерогенной среды с покрытием . . . . .	122
3.3.1. Постановка задачи о вибрации штампа при наличии трения на поверхности двухслойного гетерогенного полупространства и слоя. Построение матрицы Грина. Структура спектра двухслойной гетерогенной среды . . . . .	122
3.3.2. Сведение краевой задачи об установившихся колебаниях двухслойного гетерогенного полупространства к интегральному уравнению и построение его решения . . . . .	127
<b>Глава 4. Контактные задачи с учетом сил трения, моделирующие напряженно-деформированное состояние гетерогенных композитов при движении штампа . . . . .</b>	<b>134</b>
4.1. Постановка задачи о движении штампа при учете трения по гетерогенному полупространству. Сведение краевой задачи к интегральному уравнению. . . . .	135
4.2. Построение приближенного решения интегрального уравнения контактной задачи о движении штампа с плоским и параболическим основанием по гетерогенному полупространству при учете трения . . . . .	139
4.3. Численный анализ результатов решения контактной задачи о движении штампов с различной формой основания по гетерогенному полупространству. . . . .	141
<b>Глава 5. Гетерогенные среды с внутренними дефектами в условиях динамического нагружения. Идентификация дефектов . . . . .</b>	<b>148</b>
5.1. Постановка и решение задач о колебаниях слоя, ослабленного цилиндрическими полостями. . . . .	149
5.1.1. Постановка задач о колебаниях слоя, ослабленного цилиндрическими полостями. Сведение краевых задач к граничным интегральным уравнениям . . . . .	150
5.1.2. Асимптотический метод при решении задач о колебаниях слоя с полостью малого характерного размера . . . . .	158

---

5.2. Численный анализ результатов решения задач о колебаниях слоя с цилиндрическими полостями . . . . .	164
5.2.1. Исследование задач о колебаниях слоя с полостями на основе конечно-элементного метода . . . . .	165
5.2.2. Построение численного решения задач о колебаниях слоя с полостями на основании метода граничных интегральных уравнений . . . . .	170
5.3. Обратные геометрические задачи идентификации дефекта в виде цилиндрической полости . . . . .	179
5.3.1. Решение обратных геометрических задач на основе генетических алгоритмов . . . . .	181
5.3.2. Решение обратных геометрических задач на основе асимптотического метода для дефектов малого характерного размера . . . . .	186
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>191</b>