



С.В. Пчелинцев, О.В. Шашков

# СИНГУЛЯРНЫЕ СУПЕРАЛГЕБРЫ

Монография

RU  
**SCIENCE**  
RU-SCIENCE.COM

**С.В. Пчелинцев, О.В. Шашков**

---

# **СИНГУЛЯРНЫЕ СУПЕРАЛГЕБРЫ**

**Монография**

**RU**  
**science**  
RU-SCIENCE.COM

Москва  
2021

УДК 512  
ББК 22.1  
П92

**Авторы:**

- С.С. Пчелинцев**, ФГБОУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации», д-р физ.-мат. наук, проф.,  
**О.В. Шашков**, ФГБОУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации», канд. физ.-мат. наук, доц.

**Пчелинцев, Сергей Валентинович.**

**П92** Сингулярные супералгебры : монография / С.В. Пчелинцев, О.В. Шашков. — Москва : РУСАЙНС, 2021. — 188 с.

**ISBN 978-5-4365-8665-6**

Авторы книги – специалисты по теории колец. Они подробно излагают теорию сингулярных супералгебр. В книге выделены два важных класса сингулярных супералгебр – это линейно порожденные и алгебраически порожденные супералгебры. Линейные супералгебры полностью изучены: выяснена их структура, описаны автоморфизмы и дифференцирования. Доказано, что всякая алгебраически порожденная супералгебра с невырожденным переключателем либо линейна, либо является расширенным дублем.

*Книга может служить учебным пособием и основой для специальных курсов по теории сингулярных супералгебр. Кроме того, она представляет безусловную ценность для аспирантов и студентов старших курсов математических факультетов университетов и пединститутов, а также для научных работников – математиков, физиков и механиков, занимающихся теорией супералгебр или использующих ее в своих исследованиях.*

**Ключевые слова:** правоальтернативная супералгебра, сингулярная супералгебра, простая супералгебра.

УДК 512  
ББК 22.1

**ISBN 978-5-4365-8665-6**

© Шашков О.В.,  
Пчелинцев С.В., 2021  
© ООО «РУСАЙНС», 2021

# Оглавление

Введение.....	7
Часть I. Сингулярные супералгебры.....	14
Глава 1. Основные понятия и предварительные соглашения.....	14
§ 1. Линейные алгебры.....	14
§ 2. Правоальтернативные алгебры.....	15
§ 3. Правоальтернативные супералгебры.....	17
§ 4. Центр супералгебры.....	18
§ 5. Скалярные расширения.....	19
Глава 2. Сингулярные супералгебры размерности 5.....	21
§ 1. Предварительные замечания.....	24
§ 2. Оценки снизу на размерности однородных частей.....	24
2.1. Однородная часть не может быть одномерной.....	24
2.2. Случай $(\forall \alpha \in A) L_\alpha^2 = 0$ невозможен.....	25
2.3. Случай $d_M = 2$ невозможен.....	25
§ 3. Доказательство теоремы 2.1.....	25
3.1. Восстановление оператора $R_\alpha$ по $L_\alpha$ , если $L_\alpha^2 \neq 0$ .....	25
3.2. Случай $\delta = 1$ в лемме 2.3 невозможен.....	26
3.3. Редукция к случаю $\gamma = 0$ в системе (2.9).....	29
3.4. Действие оператора $L_b$ в базисе $x_1, x_2, x_3$ .....	30
3.5. Одно замечание об элементе $bx_3$ .....	30
3.6. Подходящие замены базисов.....	32
3.7. Структура $A$ -бимодуля $M$ .....	33
3.8. Произведения нечётных элементов.....	34
REF_Ref57537357 \h \* MERGEFORMAT 3.9. Правая альтер-	
<b><math>B_{23}\varphi, \xi, \psi</math></b> .....	35
REF_Ref57536524 \h \* MERGEFORMAT 3.10. Реализация су-	
<b><math>3</math> в виде <math>B_{23}\varphi, \xi, \psi</math></b> .....	37
§ 4. Супералгебры вида $B_{2 3}(\varphi, \xi, \psi)$ .....	38
4.1. Критерий изоморфизма супералгебр $B = B(\varphi, \xi, \psi)$ и $B' =$ <b><math>\varphi, \xi, \psi'</math></b> .....	38
4.2. Теорема 2.2 и следствия из неё.....	41
Глава 3. Сингулярные 6-мерные супералгебры.....	42
§ 1. Обозначения и замечания.....	43
§ 2. Супералгебры с 3-мерной нечётной частью.....	43
2.1. Структура $A$ -бимодуля $M$ .....	43

2.2. Произведения нечётных элементов.....	47
§ 3. Супералгебры, в которых $(\exists a \in A) L_a^3 \neq 0$ .....	48
3.1. Действие оператора $R_a$ в базисе $x_1, \dots, x_4$ .....	48
3.2. Пространство $M' = AM$ .....	50
§ 4. Супералгебры, в которых $(\forall a \in A) L_a^3 = 0$ .....	52
Глава 4. Линейно порождённые супералгебры.....	60
§ 1. Предварительные сведения.....	61
1.1. Обозначения.....	61
1.2. Предварительные замечания.....	61
§ 2. Линейно порождённые супералгебры.....	63
2.1. Супералгебра, линейная над чётной частью.....	63
2.2. Супералгебра двух отображений.....	65
2.3. Конечномерная супералгебра $B(f, \varphi)$ двух отображений.....	67
2.4. Канонический базис супералгебры $B(K, H)$ .....	69
2.5. Изоморфизм супералгебр $B_{n n+1}(H)$ и $B_{n n+1}(H')$ .....	70
§ 3. Дифференцирования супералгебр $B_{2n 2n+1}$ .....	71
3.1. Предварительные замечания.....	72
3.2. Чётные дифференцирования.....	72
3.3. Нечётные дифференцирования.....	75
3.4. Супералгебра дифференцирований.....	76
3.5. Группа автоморфизмов супералгебры $B_{2n 2n+1}$ .....	78
§ 4. Алгебраически порождённые супералгебры.....	79
4.1. Свойства компонент $X$ и $X'$ .....	79
4.2. Свойства элемента $(ax \cdot y)(bz)$ .....	81
4.3. Конечномерность одного типа сингулярных супералгебр.....	82
§ 5. Структура алгебраически порождённых сингулярных супералгебр с 2-мерной чётной частью.....	83
Глава 5. Алгебраически порождённые супералгебры.....	85
§ 1. Обозначения и известные результаты.....	87
1.1. Обозначения.....	87
1.2. Известные результаты.....	88
§ 2. Предварительные результаты.....	88
2.1. Ненулевые произведения однородных элементов.....	88
2.2. Невырожденность оператора $R_p^2$ на четной части.....	89
2.3. Спектр оператора $R_p^2$ и его весовые пространства.....	91
2.4. Структура нечётной части.....	93
§ 3. Случай $A = A_1 + A_{-1}$ и $\dim(A_{-1}) = 1$ .....	94
3.1. Действие оператора $D$ на пространстве $A_1$ .....	94
3.2. Базис пространства $M_0 = X$ .....	94

3.3. Произведения нечётных элементов.....	95
3.4. Завершение доказательства теоремы 5.3.....	97
§ 4. Достаточное условие правой альтернативности и критерий простоты.....	98
4.1. Достаточное условие правой альтернативности.....	98
4.2. Критерий простоты.....	99
§ 5. Строение сингулярных супералгебр с невырожденным переключателем.....	100
5.1. Некоторые дополнительные свойства.....	100
5.2. Расширенный дубль.....	102
§ 6. Примеры расширенных дублей.....	104
6.1. Стандартная супералгебра $B_{2n 3n}$ .....	104
6.2. Связь супералгебр $B_{2n 3n}$ и $B_{2 3}(0, -1, 0)$ .....	105
6.3. Расширенный дубль размерности $5n + 4m$ .....	107
Часть II. Унитарные супералгебры альтернативного типа.....	111
Глава 6. Основные понятия и предварительные результаты.....	111
§ 1. Теоремы Джекобсона о бипредставлениях.....	111
1.1. Бимодули и бипредставления.....	112
1.2. Йордановы бимодули над алгеброй симметрической билинейной формы.....	113
1.3. Йордановы бимодули над алгеброй $M_2(\Phi)^+$ .....	115
1.4. Йордановы бимодули над алгебрами $M_n(\Phi)$ , $n \geq 3$ .....	117
§ 2. Правые правоальтернативные модули над простыми алгебрами.....	118
2.1. Три леммы Мураками-Шестакова о правоальтернативных $M_2$ -бимодулях.....	119
§ 3. Простые супералгебры.....	120
§ 4. Центральные идемпотенты.....	121
§ 5. Пирсовы компоненты.....	122
Глава 7. Строение супералгебр с полупростой сильно альтернативной чётной частью.....	124
§ 1. Слабый аннулятор супералгебры.....	125
§ 2. Ветвление супералгебр.....	125
§ 3. Строение компоненты $M_{11}$ .....	130
3.1. Строение ассоциативной супералгебры ёмкости 1.....	131
3.2. Строение компоненты $M_{11}$ ; случай $A_1 = \mathbf{H}$ .....	132
3.3. Строение компоненты $M_{11}$ ; случай $A_1 = \mathbf{C}$ .....	135
§ 4. Строение компоненты $M_{12}$ .....	141
4.1. Начальные свойства компоненты $M_{12}$ .....	141
4.2. Строение ассоциативной супералгебры ёмкости 2.....	143

4.3. Случай $A_1 = \mathbb{C}$ .....	144
4.4. Строение неассоциативных супералгебр ёмкости 2.....	145
§ 5. <b>WA</b> -полупростые супералгебры .....	147
5.1. Теорема об отщеплении слабого аннулятора.....	147
5.2. Основная теорема и следствия из неё .....	149
Глава 8. Супералгебры ёмкости 1 альтернативного типа.....	153
§ 1. Случай $S = M_n$ при $n \geq 2$ .....	155
§ 2. Случай $S = \mathbb{C}$ — алгебра Кэли–Диксона .....	171
§ 3. Аналог основной теоремы Веддербёрна.....	175
Список литературы.....	185