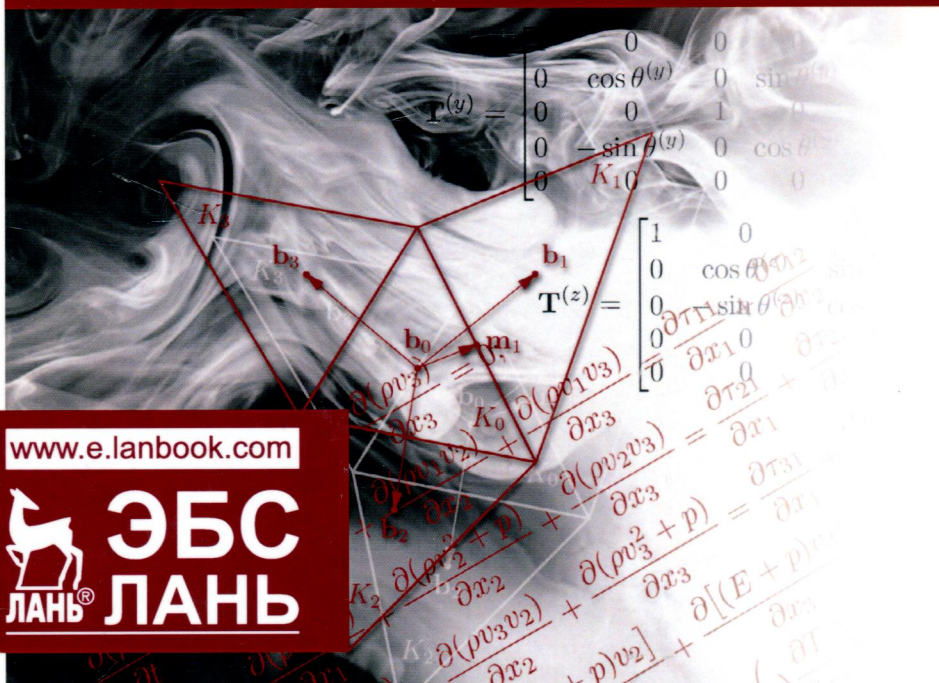


ПРИКЛАДНАЯ ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

С. А. Токарева



www.e.lanbook.com



**ЭБС
ЛАНЬ**

С. А. ТОКАРЕВА

**ПРИКЛАДНАЯ
ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ
УРАВНЕНИЙ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ



**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ · МОСКВА · КРАСНОДАР
2022**

УДК 533
ББК 22.632я73
Т 51

Токарева С. А.

Т 51 Прикладная газовая динамика. Численные методы решения гиперболических систем уравнений: Учебное пособие. — СПб.: Издательство «Лань», 2022. — 244 с. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-3741-2

Пособие посвящено современным высокоточным методам вычислительной газодинамики, применяемым при решении сложных задач моделирования течений, возникающих в различных областях науки и инженерных приложениях. В книге дано описание математических моделей гидро- и газодинамики, рассмотрены общие свойства связанных с этими моделями гиперболических уравнений и систем, а также методы их численного решения. Основное внимание уделено методам аппроксимации уравнений Эйлера, которые являются базовой моделью для описания течений жидкости и газа.

В отличие от классических учебников, в данной книге упор сделан именно на современные численные методы, которые были разработаны и получили широкое распространение в последнее время (такие как методы WENO и DG). Детально рассмотрены методы аппроксимации решения задачи Римана, которое лежит в основе этих численных методов.

Указанные методы обладают высоким порядком точности и могут применяться для расчетов в геометрически сложных областях на неструктурированных сетках.

Данная книга может быть использована как учебное пособие для студентов вузов старших курсов, обучающихся по направлениям подготовки «Механика и математическое моделирование», «Прикладная математика», «Прикладная математика и информатика», «Прикладная механика», а также аспирантов, специализирующихся в области прикладной математики и вычислительной газодинамики. Также она может использоваться как справочник для инженеров и ученых, работающих в указанных и смежных областях.

УДК 533

ББК 22.632я73

Рецензенты:

В. А. ТИТАРЕВ — доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского
центра «Информатика и управление» РАН;

И. К. МАРЧЕВСКИЙ — кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры прикладной математики Московского государственного
технического университета им. Н. Э. Баумана.

Обложка
Е. А. ВЛАСОВА

© Издательство «Лань», 2022
© С. А. Токарева, 2022
© Издательство «Лань»,
художественное оформление, 2022

Оглавление

| | |
|--|-----------|
| Список обозначений | 7 |
| Введение | 9 |
| 1 Уравнения газовой динамики | 13 |
| 1.1 Основные термодинамические законы | 13 |
| 1.1.1 Термодинамические системы и параметры состояния | 13 |
| 1.1.2 Внутренняя энергия системы, работа и теплота | 15 |
| 1.1.3 Первый закон термодинамики | 17 |
| 1.1.4 Теплоемкость вещества | 19 |
| 1.1.5 Объемное расширение и изотермическое сжатие | 21 |
| 1.1.6 Второй закон термодинамики | 22 |
| 1.1.7 Энтропия и свободная энергия | 22 |
| 1.1.8 Скорость звука в газе | 25 |
| 1.1.9 Совершенный газ | 26 |
| 1.1.10 Адиабата Пуассона | 29 |
| 1.1.11 Реальные газы | 30 |
| 1.2 Законы сохранения в газовой динамике | 32 |
| 1.2.1 Способы описания движения среды: эйлеровы и лагранжевы координаты | 32 |
| 1.2.2 Закон сохранения массы | 36 |
| 1.2.3 Закон сохранения количества движения | 37 |
| 1.2.4 Закон сохранения энергии | 39 |
| 1.3 Основные термомеханические соотношения и предположения | 42 |
| 1.3.1 Тензор напряжений | 42 |
| 1.3.2 Тепловой поток | 47 |
| 1.4 Общая система уравнений газовой динамики | 47 |
| 1.5 Уравнения газовой динамики в безразмерной форме | 50 |
| 2 Общие сведения о гиперболических уравнениях и системах | 55 |
| 2.1 Линейные гиперболические системы | 55 |
| 2.1.1 Линейное уравнение переноса | 55 |
| 2.1.2 Линейная система уравнений | 57 |
| 2.2 Квазилинейные гиперболические системы | 63 |
| 2.2.1 Квазилинейное уравнение переноса | 63 |
| 2.2.2 Квазилинейная система уравнений | 67 |
| 2.3 Дифференциальные уравнения для обобщенных инвариантов Римана | 71 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 2.4 | Некоторые определения | 77 |
| 3 | Система уравнений Эйлера в консервативной форме и ее свойства | 79 |
| 3.1 | Одномерные уравнения Эйлера | 79 |
| 3.1.1 | Характеристическая матрица, собственные числа и векторы | 80 |
| 3.2 | Двумерные уравнения Эйлера | 82 |
| 3.2.1 | Инвариантность относительно поворота системы координат | 82 |
| 3.2.2 | Характеристическая матрица, собственные числа и векторы | 83 |
| 3.3 | Трёхмерные уравнения Эйлера | 85 |
| 3.3.1 | Инвариантность относительно поворота системы координат | 85 |
| 3.3.2 | Характеристическая матрица, собственные числа и векторы | 86 |
| 3.4 | Трёхмерные уравнения Эйлера в естественных переменных | 89 |
| 3.5 | Уравнения Эйлера для симметричных течений | 90 |
| 3.5.1 | Осевая симметрия | 91 |
| 3.5.2 | Сферическая симметрия | 91 |
| 3.6 | Линеаризованные уравнения Эйлера | 92 |
| 3.7 | Инварианты Римана для уравнений Эйлера | 93 |
| 4 | Простейшие решения уравнений Эйлера | 95 |
| 4.1 | Простейшие решения одномерного квазилинейного уравнения | 95 |
| 4.2 | Решение в характеристиках. Градиентная катастрофа | 95 |
| 4.2.1 | Кусочно-непрерывные решения | 98 |
| 4.2.2 | Волна разрежения | 100 |
| 4.2.3 | Ударная волна | 101 |
| 4.3 | Простейшие решения уравнений Эйлера | 103 |
| 4.3.1 | Волна разрежения | 103 |
| 4.3.2 | Ударная волна | 109 |
| 4.3.3 | Соотношения на разрывах | 110 |
| 4.3.4 | Контактный разрыв | 115 |
| 5 | Точное решение задачи Римана для уравнений Эйлера | 117 |
| 5.1 | Постановка задачи | 117 |
| 5.2 | Точное решение одномерной задачи | 118 |
| 5.3 | Построение профиля решения | 123 |
| 5.4 | Задача Римана для трёхмерных уравнений Эйлера в направлении оси x | 127 |
| 5.5 | Точное решение задачи Римана для гиперболических уравнений с функцией потока общего вида | 129 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 6 | Приближенное решение задачи Римана для уравнений Эйлера и аппроксимация потоков | 137 |
| 6.1 | Приближенные методы решения | 137 |
| 6.1.1 | Аппроксимация линеаризованной задачи в естественных переменных | 137 |
| 6.1.2 | Аппроксимация двумя волнами разрежения | 140 |
| 6.1.3 | Аппроксимация двумя ударными волнами | 141 |
| 6.1.4 | Аппроксимация HLL | 142 |
| 6.1.5 | Аппроксимация HLLC | 145 |
| 6.2 | Численные потоки | 149 |
| 6.2.1 | Поток Годунова | 149 |
| 6.2.2 | Поток HLL | 149 |
| 6.2.3 | Поток HLLC | 150 |
| 6.2.4 | Поток Куранта — Изаксона — Риса | 151 |
| 6.2.5 | Поток Энгквиста — Ошера | 152 |
| 6.2.6 | Поток Роу | 153 |
| 6.2.6.1 | Линеаризованная задача Римана | 153 |
| 6.2.6.2 | Приближенное решение и аппроксимация потоков | 154 |
| 6.2.6.3 | Классический метод Роу для уравнений Эйлера | 156 |
| 7 | Метод конечных объемов первого порядка для уравнений газовой динамики | 161 |
| 7.1 | Метод конечных объемов для одномерных уравнений газовой динамики | 161 |
| 7.1.1 | Схема явного метода конечных объемов первого порядка | 161 |
| 7.1.2 | Вычисление потоков | 164 |
| 7.1.3 | Начальные и граничные условия | 164 |
| 7.2 | Метод конечных объемов для двумерных уравнений газовой динамики | 165 |
| 7.3 | Метод конечных объемов для трехмерных уравнений газовой динамики | 170 |
| 7.4 | Метод конечных объемов для двумерных уравнений газовой динамики | 172 |
| 7.4.1 | Схема явного метода конечных объемов первого порядка | 172 |
| 7.4.2 | Начальные и граничные условия | 176 |
| 7.5 | Метод конечных объемов для трехмерных уравнений газовой динамики | 178 |
| 7.5.1 | Схема явного метода конечных объемов первого порядка | 178 |
| 7.5.2 | Начальные и граничные условия | 181 |
| 8 | Методы конечных объемов высокого порядка | 183 |
| 8.1 | МКО высокого порядка для одномерных законов сохранения | 184 |
| 8.1.1 | Одномерная реконструкция WENO по средним значениям | 185 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 8.1.2 | Решение ОДУ | 190 |
| 8.2 | Схемы WENO для многомерных законов сохранения | 191 |
| 8.3 | Реконструкция WENO для систем уравнений | 195 |
| 9 | DG-методы | 197 |
| 9.1 | Схема RKDG-метода для одномерного гиперболического уравнения | 197 |
| 9.1.1 | Построение лимитера | 201 |
| 9.2 | RKDG-метод для многомерных гиперболических уравнений и систем | 203 |
| 9.2.1 | RKDG-метод для гиперболических систем уравнений | 208 |
| 9.3 | RKDG-метод для двумерных гиперболических уравнений и систем на декартовых сетках | 210 |
| 9.3.1 | Базисные функции | 211 |
| 9.3.2 | Квадратурные формулы | 212 |
| 9.3.3 | Построение лимитера | 212 |
| 9.4 | RKDG-метод третьего порядка для гиперболических уравнений | 213 |
| 9.5 | Базисные функции и квадратурные формулы для различных элементов | 216 |
| 9.5.1 | Канонические элементы и отображение | 217 |
| 9.5.2 | Базисные функции | 221 |
| 9.5.3 | Квадратурные формулы | 225 |
| 9.6 | RKDG-метод для уравнений конвекции-диффузии | 229 |
| | Предметный указатель | 233 |
| | Литература | 237 |