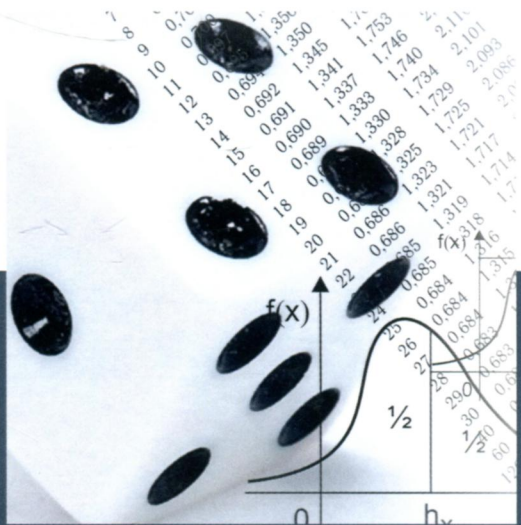


ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА



Б. Н. ИВАНОВ



E.LANBOOK.COM

Б. Н. ИВАНОВ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебное пособие

Издание третье, стереотипное



ЛАНЬ

• САНКТ-ПЕТЕРБУРГ •
• МОСКВА •
• КРАСНОДАР •
2024

УДК 519.2
ББК 22.17я73

И 20 **Иванов Б. Н.** Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие для вузов / Б. Н. Иванов. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 224 с. : ил. — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-507-49479-8

Объем материала учебного пособия отвечает стандартному семестровому курсу. Изложение носит достаточно полный и строгий характер. Рассматриваемые вопросы обычны для начального курса теории вероятностей и математической статистики. Большое внимание уделяется решению задач и формализации их условий в рамках вероятностных пространств. По курсу студенты выполняют ряд индивидуальных заданий, сгруппированных по темам: комбинаторные схемы, случайные события, дискретные и непрерывные случайные величины, обработка результатов наблюдений. Приводятся примеры вариантов заданий и их решение.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки и специальностям: «Математика и механика», «Физика и астрономия», «Электро- и теплотехника», «Машиностроение», «Физико-технические науки и технологии», «Технологии материалов», и другим инженерно-техническим специальностям и направлениям подготовки. Книга будет полезна преподавателям, аспирантам и студентам других специальностей, изучающим теорию вероятностей и математическую статистику.

УДК 519.2
ББК 22.17я73

Рецензенты:

Г. Ш. ЦИЦИАШВИЛИ — доктор физико-математических наук, профессор, зав. лабораторией Института прикладной математики ДВО РАН;
Н. Е. ДЕГТЯРЕВА — кандидат технических наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и анализа Дальневосточного федерального университета.

Обложка
Е. А. ВЛАСОВА

© Издательство «Лань», 2024
© Б. Н. Иванов, 2024
© Издательство «Лань»,
художественное оформление, 2024

Оглавление

Введение	7
1. Комбинаторные схемы	8
1.1. Правило суммы	8
1.2. Правило прямого произведения	9
1.3. Размещения с повторениями	9
1.4. Размещения без повторений	10
1.5. Перестановки	10
1.6. Сочетания	11
1.7. Сочетания с повторениями	13
1.8. Перестановки с повторениями, мультимножества	14
1.9. Упорядоченные разбиения множества	15
1.10. Неупорядоченные разбиения множества	17
1.11. Принцип включения и исключения	19
1.12. Полиномиальная формула	23
1.13. Бином Ньютона	23
1.14. Обобщенный бином Ньютона	24
2. Пространство элементарных событий	26
2.1. Статистическое определение вероятности	26
2.2. Пространство элементарных событий	27
2.3. Классическое определение вероятности	28
2.4. Геометрическая интерпретация событий	30
2.5. Алгебра событий (аксиоматический подход)	30
2.6. Аксиоматическое определение вероятности	32
2.7. Принцип включения и исключения для вероятностей	33
3. Условные вероятности. Независимость событий	38
3.1. Условные вероятности	38
3.2. Независимость событий	39
3.3. Полная группа событий	40
3.4. Формула полной вероятности	40
3.5. Формула Байеса. Теорема гипотез	41
4. Случайные величины	45
4.1. Определение случайной величины	45
4.2. Дискретное вероятностное пространство	45
4.3. Геометрическое распределение	46
4.4. Многомерная случайная величина	47
4.5. Числовые характеристики случайных величин	49
4.5.1. Математическое ожидание	49
4.5.2. Дисперсия	50
4.6. Ковариация	51
4.7. Дисперсия суммы	52
4.8. Производящая функция	53
4.8.1. Геометрическое распределение	53
5. Повторные испытания	55
5.1. Биномиальное распределение	55

Оглавление

Введение	7
1. Комбинаторные схемы	8
1.1. Правило суммы	8
1.2. Правило прямого произведения	9
1.3. Размещения с повторениями	9
1.4. Размещения без повторений	10
1.5. Перестановки	10
1.6. Сочетания	11
1.7. Сочетания с повторениями	13
1.8. Перестановки с повторениями, мультимножества	14
1.9. Упорядоченные разбиения множества	15
1.10. Неупорядоченные разбиения множества	17
1.11. Принцип включения и исключения	19
1.12. Полиномиальная формула	23
1.13. Бином Ньютона	23
1.14. Обобщенный бином Ньютона	24
2. Пространство элементарных событий	26
2.1. Статистическое определение вероятности	26
2.2. Пространство элементарных событий	27
2.3. Классическое определение вероятности	28
2.4. Геометрическая интерпретация событий	30
2.5. Алгебра событий (аксиоматический подход)	30
2.6. Аксиоматическое определение вероятности	32
2.7. Принцип включения и исключения для вероятностей	33
3. Условные вероятности. Независимость событий	38
3.1. Условные вероятности	38
3.2. Независимость событий	39
3.3. Полная группа событий	40
3.4. Формула полной вероятности	40
3.5. Формула Байеса. Теорема гипотез	41
4. Случайные величины	45
4.1. Определение случайной величины	45
4.2. Дискретное вероятностное пространство	45
4.3. Геометрическое распределение	46
4.4. Многомерная случайная величина	47
4.5. Числовые характеристики случайных величин	49
4.5.1. Математическое ожидание	49
4.5.2. Дисперсия	50
4.6. Ковариация	51
4.7. Дисперсия суммы	52
4.8. Производящая функция	53
4.8.1. Геометрическое распределение	53
5. Повторные испытания	55
5.1. Биномиальное распределение	55

5.2.	Другая модель биномиального распределения	56
5.3.	Числовые характеристики $B(n, k, p)$	56
5.3.1.	Среднее значение и дисперсия	56
5.3.2.	Мода	57
5.3.3.	Медиана	57
5.4.	Производящая функция $B(n, k, p)$	58
5.5.	Повторные испытания в задачах	59
5.6.	Гипергеометрическое распределение	60
5.7.	Отрицательное биномиальное распределение	63
6.	Распределение Пуассона	67
6.1.	Простейший поток событий	67
6.2.	Поток заявок на промежутке Δt	67
6.3.	Поток заявок на интервале $[0, t]$	68
6.4.	Числовые характеристики	69
6.5.	Характеристическая функция	70
7.	Непрерывные случайные величины	72
7.1.	Функция распределения	72
7.2.	Плотность распределения	74
7.3.	Многомерное распределение	80
7.3.1.	Функция распределения	80
7.3.2.	Плотность распределения	81
7.3.3.	Оператор усреднения	86
7.3.4.	Независимость случайных величин	87
8.	Равномерное распределение	89
8.1.	Функция распределения	89
8.2.	Плотность распределения	90
8.3.	Геометрические вероятности	90
9.	Нормальное распределение	96
9.1.	Плотность распределения	96
9.2.	Правило трех сигм	97
9.3.	Локальная теорема Муавра—Лапласа	98
9.4.	Интегральная теорема Муавра—Лапласа	99
10.	Коэффициент корреляции	102
10.1.	Коэффициент корреляции	102
10.2.	Линейная регрессия	104
11.	Преобразование плотности распределения	107
11.1.	Одномерное распределение	107
11.2.	Распределение хи-квадрат $\chi^2(1)$	108
11.3.	Многомерное распределение	109
11.4.	Генераторы случайных чисел	111
11.5.	Экспоненциальное распределение	112
11.6.	Нормальное распределение	112
11.7.	Биномиальное распределение	113
12.	Характеристическая функция	114
12.1.	Свойства $g(t)$	114

12.2. Мультипликативность $g(t)$	114
12.2.1. Воспроизводящее свойство $g(t)$ по параметру	115
13. Специальные распределения	116
13.1. Гамма-функция	116
13.2. Гамма-распределение	116
13.3. Показательное распределение	117
13.4. Нормальное распределение	119
13.5. Распределение хи-квадрат Пирсона	120
13.6. Распределение Стьюдента	121
13.7. Распределение Фишера—Снедекора	122
14. Закон больших чисел	123
14.1. Неравенство Чебышева	123
14.2. Закон больших чисел	124
14.3. Центральная предельная теорема	125
15. Решение задач индивидуальных заданий	128
15.1. Комбинаторные схемы	128
15.2. Случайные события	135
15.3. Случайные величины	140
16. Методы математической статистики	147
16.1. Теория выборочного метода	147
16.2. Вариационный ряд выборки	149
16.3. Эмпирическая функция распределения	149
16.4. Гистограмма и полигон частот	152
16.5. Функция распределения по сгруппированным данным	153
16.6. Выборочные характеристики случайных величин	155
16.6.1. Числовые характеристики \bar{x}	156
16.6.2. Числовые характеристики S^2	157
17. Методы построения статистик	159
17.1. Метод моментов К. Пирсона	159
17.2. Метод максимального правдоподобия Р. Фишера	160
17.3. Метод минимума хи-квадрат К. Пирсона	161
18. Распределение выборочных статистик	164
18.1. Спектральное разложение симметричных матриц	164
18.2. Нормальные случайные величины	165
18.3. Лемма Фишера	169
18.4. Распределение выборочных статистик	170
18.5. Критерий хи-квадрат К. Пирсона	172
18.6. Критерий хи-квадрат, оценка параметров по выборке	179
19. Интервальное оценивание параметров	180
19.1. Доверительный интервал	180
19.2. Построение доверительного интервала	180
19.3. Оценка параметров нормального распределения	182
19.3.1. Оценка параметра m , параметр σ^2 известен	183
19.3.2. Оценка параметра m , параметр σ^2 неизвестен	184
19.3.3. Оценка параметра σ^2 , параметр m известен	185

19.3.4. Оценка параметра σ^2 , параметр t неизвестен . . .	186
20. Проверка статистических гипотез	187
20.1. Основные определения	187
20.2. Примеры статистических гипотез	188
20.3. Критерий согласия проверки гипотезы H_0	189
20.4. Ошибки первого и второго рода	191
20.5. Общая схема проверки гипотезы	192
20.6. Проверка гипотезы о виде распределения	193
21. Решение задач индивидуальных заданий	197
21.1. Пример индивидуального задания	197
21.2. Решение задач индивидуального задания	198
22. Метод наименьших квадратов	208
22.1. Метод наименьших квадратов	208
22.2. Линейная модель функциональной зависимости	209
22.3. Средние оценки параметров линейной модели	211
22.4. Пример зависимости высоты дуба от его возраста	213
23. Приложения	215
23.1. Нормальное распределение	215
23.2. Квантили нормального распределения	216
23.3. Квантили хи-квадрат распределения	217
23.4. Квантили распределения Стьюдента	218
Литература	219
Предметный указатель	220