

**Л.В. ОВСЯННИКОВ**

---

**ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ**

---



**Л.В. ОВСЯННИКОВ**

**ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ**



**МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

**1978**

517.2

О 34

УДК 517.9

**Групповой анализ дифференциальных уравнений.** Овсянников Л. В. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1978, 400 стр.

Предмет книги лежит на стыке алгебры и математического анализа. Излагаемая система фактов и алгоритмов открывает возможности эффективного исследования конкретных дифференциальных уравнений, возникающих в качестве математических моделей в физике, механике, теории управления, вычислительной математике и других областях знания. В книге излагается общая теория локальных групп Ли преобразований и алгебр Ли операторов, теория инвариантов и инвариантных многообразий. Рассматриваются вопросы групповой классификации дифференциальных уравнений и их решений. Даются примеры применения техники группового анализа к конкретным системам дифференциальных уравнений.

О  $\frac{20203-056}{053(02)-78}$  49-78

© Главная редакция  
физико-математической литературы  
издательства «Наука», 1978

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	8
Основные обозначения . . . . .	15

### Г л а в а I

#### ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

§ 1. Определения и примеры . . . . .	18
1. Действие и представление группы (18). 2. Однопараметрическая группа (19). 3. Непрерывность (19). 4. Пример: группа переносов (20). 5. Группы линейных гомеоморфизмов (20). 6. Пример: группа растяжений (21). 7. Пример: группа вращений (21). 8. Локальная теория (22). 9. Локальная группа Ли (23). 10. Пример: проективная группа (23). 11. Подобие групп (24). 12. Пример (24). 13. Касательное векторное поле (25). 14. Уравнение Ли (25). 15. Примеры (26). 16. Подобие касательных полей (27).	
§ 2. Инфинитезимальный оператор . . . . .	28
1. Задача о построении группы (28). 2. Лемма (28). 3. Теорема Ли (29). 4. Пример построения группы (30). 5. Соответствие групп и векторных полей (30). 6. Оператор группы (31). 7. Примеры (32). 8. Инвариантность оператора (32).	
§ 3. Инварианты и инвариантные многообразия . . . . .	34
1. Продолжение представления группы (34). 2. Коммитанты и инварианты (34). 3. Инварианты группы Ли (34). 4. Критерий инварианта (35). 5. Универсальный инвариант (35). 6. Конечномерный случай (38). 7. Примеры инвариантов (39). 8. Теорема о подобии (41). 9. Следствия (42). 10. Инвариантные многообразия (43). 11. Регулярно заданные многообразия (44). 12. Критерий инвариантности (45). 13. Примеры (46).	
§ 4. Теория продолжения . . . . .	47
1. Пространства полилинейных отображений (47). 2. Продолжения пространства (48). 3. Продолжение операторов дифференцирования (48). 4. Продолжение отображений (49). 5. Продолжение преобразования (50). 6. Основное свойство продолжения (52). 7. Продолжение группы (54). 8. Продолжение инфинитезимального оператора (55). 9. Стандартные коммутаторы (56). 10. Конечномерный случай (58). 11. Пример (58). 12. Дифференциальные инварианты (59).	
Литература к главе I . . . . .	60
	1*

## Глава II

## ГРУППЫ, ДОПУСКАЕМЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

§ 5. Определяющие уравнения . . . . .	63
1. Система дифференциальных уравнений (63). 2. Основное определение (64). 3. Условие инвариантности (64). 4. Определяющие уравнения (66). 5. Основная группа (67). 6. Действие на решениях (68). 7. Производство решений (69). 8. Алгоритм (69). 9. Пример (71).	
§ 6. Задача групповой классификации . . . . .	75
1. Общие соображения (75). 2. Преобразования уравнения (76). 3. Произвольный элемент (77). 4. Преобразования эквивалентности (78). 5. Задача классификации (80). 6. Описание процесса решения (81). 7. Пример: нелинейная теплопроводность (82). 8. Случай линейного уравнения (86).	
§ 7. Алгебра Ли операторов . . . . .	87
1. Коммутатор (87). 2. Действие на отображение (87). 3. Алгебраические свойства (88). 4. Определения (89). 5. Структурный тензор (89). 6. Линейные отображения алгебр Ли (90). 7. Критерий изоморфизма (91). 8. Пример (92). 9. Инвариантность относительно подобия (93). 10. Групповой коммутатор (94). 11. Допускаемые операторы (95). 12. Продолжение коммутатора (96). 13. Допускаемые алгебры Ли (98). 14. Линейные уравнения (99). 15. Абстрактные определяющие уравнения (101).	
Литература к главе II . . . . .	102

## Глава III

## ОСНОВНЫЕ ГРУППЫ КОНКРЕТНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

§ 8. Обыкновенные дифференциальные уравнения . . . . .	104
1. Система уравнений первого порядка (104). 2. Определяющие уравнения (104). 3. Анализ общего решения (105). 4. Структура основной алгебры Ли (106). 5. Понижение размерности уравнения (107). 6. Примеры (108). 7. Уравнения высших порядков (109). 8. Уравнение второго порядка (110). 9. Полные системы (113). 10. Заключительные замечания (115).	
§ 9. Линейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными . . . . .	116
1. Постановка задачи (116). 2. Инварианты Лапласа (117). 3. Ряд Лапласа (118). 4. Определяющие уравнения (120). 5. Анализ общего решения (122). 6. Классификационная теорема (123). 7. Параболическая нормальная форма (125). 8. Классификация параболических форм (126). 9. Классификационный результат (128).	
§ 10. Уравнения пограничного слоя . . . . .	129
1. Описание системы уравнений (129). 2. Предварительная информация об операторе (129). 3. Определяющие уравнения (130). 4. Общее решение (131). 5. Случай заданного давления (131). 6. Групповая классификация (132). 7. Стационарный пограничный слой (137). 8. Групповая классификация (138).	
§ 11. Уравнения газовой динамики . . . . .	139
1. Описание системы уравнений (139). 2. Определяющие уравнения (140). 3. Ядро основных алгебр Ли (141). 4. Предварительный	

анализ (142). 5. Групповая классификация (143). 6. Сводка результатов (146).	
Литература к главе III . . . . .	146

## Г л а в а IV

## ТЕОРИЯ ЛИ

§ 12. Локальная группа Ли . . . . .	150
1. Определения (150). 2. Свойства умножения (151). 3. Локальный изоморфизм (152). 4. Уравнение и первая теорема Ли (154). 5. Каноническое умножение (156). 6. Канонический изоморфизм (158). 7. Гомоморфизмы канонических групп (160). 8. Вторая теорема Ли (161). 9. Структурный оператор (162). 10. Банахова алгебра Ли (164). 11. Определенность группы ее структурным оператором (165). 12. Третья теорема Ли (166). 13. Пример (169). 14. Аналитичность канонического умножения (170). 15. Ряд Шура—Кэмпбелла—Хаусдорфа (173). 16. Конечномерный случай (175).	
§ 13. Алгебры Ли . . . . .	177
1. Определения и примеры (177). 2. Структурные константы (178). 3. Гомоморфизмы (178). 4. Подалгебры (179). 5. Факторалгебра (181). 6. Структурные признаки подалгебр (182). 7. Некоторые классы алгебр Ли (183). 8. Радикал (184). 9. Теорема Леви (185).	
§ 14. Присоединенная алгебра . . . . .	185
1. Алгебра дифференцирований (185). 2. Естественный гомоморфизм (186). 3. Представление алгеброй Ли операторов (187). 4. Внутренние автоморфизмы (188). 5. Форма Киллинга (190). 6. Структурные свойства (191). 7. Оптимальные системы подалгебр (191). 8. Малые размерности (193). 9. Пример (196).	
§ 15. Соответствие групп и алгебр Ли . . . . .	199
1. Алгебра Ли группы Ли (199). 2. Подгруппы и подалгебры (201). 3. Нормальные делители и идеалы (202). 4. Центры (204). 5. Факторгруппы и факторалгебры (205). 6. Гомоморфизмы (206). 7. Группы внутренних автоморфизмов (207). 8. Оптимальные системы подгрупп (209).	
§ 16. Группы Ли преобразований . . . . .	210
1. Определение (210). 2. Касательное отображение (212). 3. Критерий точности представления (213). 4. Первая теорема Ли (214). 5. Вторая теорема Ли (215). 6. Третья теорема Ли (216). 7. Каноническая группа второго рода (217). 8. Примеры (219). 9. Подобие групп преобразований (220). 10. Транзитивность (221). 11. Подобие просто транзитивных групп (223). 12. Группы Ли, допускаемые дифференциальными уравнениями (225).	
Литература к главе IV . . . . .	225

## Г л а в а V

## ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ

§ 17. Инварианты группы преобразований . . . . .	228
1. Определение и критерий инварианта (228). 2. Полные семейства векторных полей (229). 3. Универсальный инвариант группы (232). 4. Инварианты внутренних автоморфизмов (234). 5. Примеры (235). 6. Инварианты расширений (236).	

§ 18. Инвариантные многообразия . . . . .	238
1. Определение (238). 2. Критерий инвариантности (239). 3. Индуцированная группа (240). 4. Индуцированная алгебра Ли (241). 5. Наименьшие инвариантные многообразия (242). 6. Особые инвариантные многообразия (243). 7. Теорема о представлении (244). 8. Ранг неособого инвариантного многообразия (245). 9. Пример (246).	
§ 19. Инвариантные решения уравнений . . . . .	247
1. Сводка исходных понятий (247). 2. Определение (248). 3. Необходимые условия (249). 4. Проекция (251). 5. Продолжение инвариантного многообразия (252). 6. Теорема существования (254). 7. Факторсистема (255). 8. Случай разделения переменных (256). 9. Примеры (257). 10. Группы растяжений (258). 11. Теория размерностей (261). 12. Автомодельные решения (264).	
§ 20. Классификация инвариантных решений . . . . .	266
1. Классификация по рангу (266). 2. Орбиты решений (267). 3. Существенно различные решения (267). 4. Свойство факторсистемы (269). 5. Оптимальные системы решений (269). 6. Пример (270).	
Литература к главе V . . . . .	272

## Г л а в а VI

## ЧАСТИЧНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

§ 21. Ранг и дефект многообразия . . . . .	275
1. Орбита многообразия (275). 2. Ранг и дефект (276). 3. Вычисление дефекта (277). 4. Переход к подгруппе (278). 5. Редукция (279). 6. Существенные параметры (280).	
§ 22. Частично инвариантные решения . . . . .	282
1. Необходимые условия (282). 2. Описание алгоритма (283). 3. Типы частично инвариантных решений (285). 4. Пример (286). 5. Проблема редукции (287). 6. Лемма о ранге (288). 7. Теорема о редукции (290). 8. Примеры (292).	
§ 23. Кратные волны . . . . .	293
1. Квазилинейные системы (293). 2. Решения типа «бегущих волн» (294). 3. Допускаемая группа (296). 4. Подгруппы и их инварианты (296). 5. Простые волны (298). 6. Пример волнового уравнения (301). 7. Двойные волны (301). 8. Пример (305). 9. Уравнения газовой динамики (306).	
Литература к главе VI . . . . .	308

## Г л а в а VII

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ

§ 24. Общая теория . . . . .	311
1. Предварительные соображения (311). 2. Инвариантное дифференцирование (313). 3. Примеры (316). 4. Базис инвариантов (317). 5. Примеры базисов (319). 6. Определяющие уравнения данной группы (320). 7. О бесконечных группах Ли (322). 8. Инварианты бесконечных групп (324). 9. Примеры (326).	
§ 25. Автоморфные системы . . . . .	328
1. Определение (328). 2. Структура автоморфной системы (328). 3. Построение автоморфных систем (330). 4. Классификация автоморфных систем (332). 5. Пример (333).	

§ 26. Групповое расслоение . . . . .	334
1. Постановка вопроса (334). 2. Существование группового расслоения (335). 3. Дифференциально-инвариантные решения (336). 4. Пример расслоения (337).	
Литература к главе VII . . . . .	338

## Г л а в а VIII

### СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

§ 27. Линейное уравнение второго порядка . . . . .	340
1. Уравнение и его преобразования (340). 2. Условие инвариантности (341). 3. Определяющие уравнения (344). 4. Ассоциированное риманово пространство (346). 5. Некоторые формулы римановой геометрии (347). 6. Ковариантная форма определяющих уравнений (349). 7. Инварианты уравнения (351). 8. Группы движений (352). 9. Случай группы максимального порядка (353). 10. Группы, допускаемые стандартными уравнениями (355).	
§ 28. Касательные преобразования . . . . .	357
1. Специальное расширение пространства (357). 2. Основное определение (357). 3. Представление инфинитезимального оператора (359). 4. Приложения (361). 5. Продолжение касательных преобразований (363). 6. Касательные преобразования высших порядков (364). 7. Группы Ли-Бэклунда (365).	
§ 29. Краевые задачи . . . . .	367
1. Общие соображения (367). 2. Системы первого порядка (368). 3. Инвариантные решения задачи Коши (369). 4. Инвариантность характеристик (371). 5. Инвариантность сильного разрыва (373). 6. Уравнения Навье—Стокса (375). 7. Задачи со свободной границей (376).	
§ 30. Законы сохранения . . . . .	377
1. О законах сохранения (377). 2. Инвариантность функционала (378). 3. Основная лемма (380). 4. Теорема Нётер (382). 5. Другие законы сохранения (383). 6. Обращение теоремы Нётер (384). 7. Пример (385).	
Литература к главе VIII . . . . .	386
П р и л о ж е н и е. Таблицы вычисленных основных групп . . . . .	389