

А.И.МАЛЬЦЕВ

ОСНОВЫ
ЛИНЕЙНОЙ
АЛГЕБРЫ

А. И. МАЛЬЦЕВ

ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов университетов*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1970

517.1

М 21

УДК 512.8/075.8

Анатолий Иванович Мальцев
Основы линейной алгебры

М., 1970 г., 400 стр. с илл.

Редакторы *Ю. Л. Ершов, Ю. И. Мерзляков, В. Н. Ремесленников, Ф. И. Кизнер*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно*

Корректоры *Т. С. Плетнёва, Л. С. Сомова*

Сдано в набор 19/IX 1969 г. Подписано к печати 10/III 1970 г. Бумага 60×90¹/₁₆. Физ. печ. л. 25. Условн. печ. л. 25. Уч.-изд. л. 25,56. Тираж 75 000 экз. Т-00222. Цена книги 1 р. 02 к. Заказ № 768.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, г. Ленинград, Гатчинская ул., 26.

2-2-3

6-70

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к третьему изданию	7
Введение	8
Глава I. Матрицы и определители	10
§ 1. Действия с матрицами	10
1.1. Матрицы. Основное поле (10). 1.2. Умножение матриц (12). 1.3. Транспонирование матриц (17). 1.4. Клеточные матрицы (21). 1.5. Кватернионы (24). Примеры и задачи	28
§ 2. Определители	30
2.1. Определение (30). 2.2. Основные свойства определителей (36). 2.3. Определитель произведения. Обратные матрицы (45). 2.4. Крамеровские системы линейных уравнений (50). Дополнения и примеры	54
§ 3. Характеристический и минимальный многочлены	55
3.1. Подобие матриц (55). 3.2. Характеристический многочлен (57). 3.3. Минимальный многочлен (60). Примеры и задачи	64
Глава II. Линейные пространства	65
§ 4. Размерность	65
4.1. Модули и векторные пространства (65). 4.2. Линейная зависимость (70). 4.3. Изоморфизм (78). Примеры и задачи	81
§ 5. Координаты	81
5.1. Координаты вектора (81). 5.2. Ранги матриц (85). 5.3. Общие системы линейных уравнений (92). Дополнения и примеры	97
§ 6. Линейные подпространства	98
6.1. Пересечение и сумма подпространств (98). 6.2. Прямые суммы (103). 6.3. Системы однородных линейных уравнений (105). Примеры и задачи	109
Глава III. Линейные преобразования	110
§ 7. Преобразования произвольных множеств	110
7.1. Произведение преобразований (110). 7.2. Единичное и обратное преобразования (112). 7.3. Взаимно однозначные преобразования (113). 7.4. Подстановки (114). Примеры и задачи	117

§ 8.	Линейные преобразования и их матрицы	117
	8.1. Простейшие свойства (117). 8.2. Матрица линейного преобразования (120). 8.3. Преобразование координат (121). Примеры и задачи	123
§ 9.	Действия с линейными преобразованиями	123
	9.1. Умножение линейных преобразований (123). 9.2. Умножение на число и сложение (125). 9.3. Многочлены от линейных преобразований (127). Примеры и задачи	128
§ 10.	Ранг и дефект линейного преобразования	129
	10.1. Ядро и область значений (129). 10.2. Особенные и неособенные преобразования (131). 10.3. Ранг матрицы преобразования (133). Примеры и задачи	135
§ 11.	Инвариантные подпространства	135
	11.1. Индуцированное преобразование (135). 11.2. Прямая сумма инвариантных подпространств (137). 11.3. Характеристический многочлен преобразования (139). 11.4. Собственные векторы и собственные значения (140). Примеры и задачи	143
§ 12.	Преобразования с матрицей нормальной формы	144
	12.1. Диагональная форма (144). 12.2. Клетки Жордана (145). 12.3. Корневые подпространства (146). Примеры и задачи	149
Глава IV. Многочленные матрицы		150
§ 13.	Инвариантные множители	150
	13.1. Эквивалентность (150). 13.2. Диагональная форма (152). 13.3. Наибольшие общие делители миноров (155). 13.4. Условия эквивалентности (159). Примеры и задачи	162
§ 14.	Элементарные делители	163
	14.1. Связь с инвариантными множителями (163). 14.2. Элементарные делители распавшейся матрицы (165). Примеры и задачи	166
§ 15.	Нормальные формы матрицы линейного преобразования	167
	15.1. Деление λ -матриц (167). 15.2. Скалярная эквивалентность (169). 15.3. Критерий подобия матриц (170). 15.4. Нормальная форма Жордана (171). 15.5. Естественная нормальная форма (174). 15.6. Другие нормальные формы (176). Примеры и задачи	179
§ 16.	Функции от матриц	180
	16.1. Многочлен от жордановой матрицы (181). 16.2. Скалярные функции (182). 16.3. Представление значений функций многочленами (185). 16.4. Элементарные делители функций (187). 16.5. Степенные ряды (190). 16.6. Матрицы, перестановочные с данной матрицей (191). 16.7. Матрицы, перестановочные с перестановочными матрицами (195). Примеры и задачи	197

Глава V. Унитарные и евклидовы пространства	199
§ 17. Унитарные пространства	199
17.1. Аксиоматика и примеры (199). 17.2. Длина вектора (203). 17.3. Ортонормированные системы (205). 17.4. Изоморфизм (210). 17.5. Ортогональные суммы. Проекции (211). Примеры и задачи	213
§ 18. Сопряженные преобразования	214
18.1. Линейные функции (214). 18.2. Сопряженные преоб- разования (217). 18.3. Нормальные преобразования (219). Примеры и задачи	224
§ 19. Унитарные и симметрические преобразования	225
19.1. Унитарные преобразования (225). 19.2. Унитарная экви- валентность (227). 19.3. Нормальная форма матрицы унитар- ного преобразования (229). 19.4. Симметрические преоб- разования (231). 19.5. Кососимметрические преобразования (233). 19.6. Неотрицательные симметрические преобразования (235). Примеры и задачи	239
§ 20. Разложения общих преобразований	240
20.1. Разложение на симметрическую и кососимметрическую части (240). 20.2. Полярное разложение (241). 20.3. Преобра- зование Кэли (245). 20.4. Спектральное разложение (248). Примеры и задачи	252
Глава VI. Квадратичные и билинейные формы	254
§ 21. Билинейные формы	254
21.1. Преобразование форм (254). 21.2. Эквивалентность билинейных форм (251). 21.3. Конгруэнтность симметрических билинейных форм (259). Примеры и задачи	261
§ 22. Квадратичные формы	262
22.1. Конгруэнтность (262). 22.2. Алгоритм Лагранжа (264). 22.3. Закон инерции квадратичных форм (267). 22.4. Знако- постоянные формы (269). Примеры и задачи	270
§ 23. Пары форм	271
23.1. Эквивалентность пар форм (271). 23.2. Конгруэнтность пар форм (272). 23.3. Конгруэнтность несимметрических билинейных форм (276). Примеры и задачи	278
§ 24. Билинейные функции	278
24.1. Основные определения (278). 24.2. Пространства с били- нейной метрикой (282). 24.3. Билинейные функции в били- нейно-метрических пространствах (286). Примеры и задачи	292
Глава VII. Линейные преобразования билинейно-метрических пространств	293
§ 25. Основные типы линейных преобразований	293
25.1. Автоморфизмы (293). 25.2. Симметрические и кососим- метрические преобразования (298). Примеры и задачи	300

§ 26. Комплексные евклидовы пространства	300
26.1. Симметрические преобразования (301). 26.2. Кососимметрические преобразования (303). 26.3. Комплексные ортогональные преобразования (306).	
Примеры и задачи	309
§ 27. Симплектические пространства	309
27.1. Симметрические преобразования (309). 27.2. Кососимметрические преобразования (312). 27.3. Симплектические преобразования (313).	
Примеры и задачи	315
§ 28. Псевдоунитарные пространства	315
28.1. Симметрические преобразования (316). 28.2. Псевдоунитарные преобразования (324).	
Примеры и задачи	325
Глава VIII. Аффинные пространства	326
§ 29. Общие аффинные пространства	326
29.1. Аксиоматика (326). 29.2. Линейные многообразия (334). 29.3. Параллельные плоскости (344). 29.4. Линейные функционалы (346).	
Дополнения и примеры	351
§ 30. Аффинные координаты	353
30.1. Координаты точки (353). 30.2. Уравнения плоскостей (356). 30.3. Уравнения гиперплоскостей и прямых (364). 30.4. Преобразование аффинных координат (369).	
Примеры и задачи	373
§ 31. Выпуклые тела	374
31.1. Лучи (374). 31.2. Полупространства (377). 31.3. Выпуклые множества (381).	
Дополнения и примеры	385
§ 32. Евклидовы точечные пространства	386
32.1. Длина ломаной (386). 32.2. Угол между прямыми (388). 32.3. Ортогональные проекции (391). 32.4. Угол между плоскостью и прямой (397).	
Примеры и задачи	398
Предметный указатель	399