

В. И. СМ ИРН ОВ

КУРС  
ВЫСШЕЙ  
МАТЕМАТИКИ

ТОМ  
III  
ЧАСТЬ  
2

Акад. В. И. СМЕРНОВ

**КУРС  
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ**

**ТОМ ТРЕТИЙ  
ЧАСТЬ ВТОРАЯ**

**ИЗДАНИЕ  
СЕДЬМОЕ**

*Допущено  
Министерством высшего образования СССР  
в качестве учебного пособия  
для механико-математических  
и физико-математических факультетов  
государственных университетов*

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1958**

*„Курс высшей математики“ (тт. I—V)  
акад. В. И. Смирнова  
удостоен Сталинской премии в 1948 году*

---

#### ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

В этом издании том III разделен на две части. Настоящая вторая часть содержит материал прежнего III тома, начиная с главы, посвященной основам теории функций комплексного переменного. В нее внесено изменение в изложении некоторых вопросов и добавлен новый материал. Этот новый материал касается главным образом исследования интегралов типа Коши и приближенного вычисления интегралов по методу скорейшего спуска.

В последнем вопросе существенную помощь при изложении мне оказал профессор Г. И. Петрашень, за что я приношу ему большую благодарность.

Ссылки на первую часть третьего тома указываются, например, так: [III<sub>1</sub>, 44].

*В. Смирнов*

1 июня 1949 г.

---

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### Г л а в а I

#### ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. Функции комплексного переменного (7). 2. Производная (13).  
3. Конформное преобразование (19). 4. Интеграл (22). 5. Теорема Коши (24). 6. Основная формула интегрального исчисления (27).  
7. Формула Коши (30). 8. Интегралы типа Коши (36). 9. Следствия формулы Коши (39). 10. Изолированные особые точки (40). 11. Бесконечные ряды с комплексными членами (43). 12. Теорема Вейерштрасса (46). 13. Степенные ряды (49). 14. Ряд Тэйлора (51). 15. Ряд Лорана (54). 16. Примеры (57). 17. Изолированные особые точки. Бесконечно далекая точка (62). 18. Аналитическое продолжение (65). 19. Примеры многозначных функций (73). 20. Особые точки аналитических функций и римановы поверхности (81). 21. Теорема вычетов (85). 22. Теоремы о числе корней (87). 23. Обращение степенного ряда (92). 24. Принцип симметрии (95). 25. Ряд Тэйлора на окружности сходимости (99). 26. Главное значение интеграла (102). 27. Главное значение интеграла (продолжение) (106). 28. Интегралы типа Коши (111).

### Г л а в а II

#### КОНФОРМНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ПЛОСКОЕ ПОЛЕ

29. Конформное преобразование (117). 30. Линейное преобразование (120). 31. Дробно-линейное преобразование (121). 32. Функция  $w = z^2$  (132). 33. Функция  $w = \frac{k}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$  (133). 34. Двуугольник и полоса (136). 35. Основная теорема (139). 36. Формула Кристоффеля (142). 37. Частные случаи (149). 38. Случай внешности многоугольника (152). 39. Минимальное свойство преобразования на круг (155). 40. Способ сопряженных тригонометрических рядов (158). 41. Плоское установившееся течение жидкости (165). 42. Примеры (167). 43. Задача полного обтекания (171). 44. Формула Н. Е. Жуковского (172). 45. Плоская электростатическая задача (174). 46. Примеры (177). 47. Плоское магнитное поле (181). 48. Формула Шварца (182). 49. Ядро  $\operatorname{ctg} \frac{s-t}{2}$  (184).

50. Предельные задачи (189). 51. Бигармоническое уравнение (193). 52. Волновое уравнение и аналитические функции (196). 53. Основная теорема (198). 54. Диффракция плоской волны (204). 55. Отражение упругих волн от прямолинейной границы (209).

### Г л а в а III

#### ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЫЧЕТОВ, ЦЕЛЫЕ И ДРОБНЫЕ ФУНКЦИИ

56. Интеграл Френеля (215). 57. Интегрирование выражений с тригонометрическими функциями (217). 58. Интегрирование рациональной дроби (219). 59. Некоторые новые типы интегралов с тригонометрическими функциями (221). 60. Лемма Жордана (224). 61. Представление некоторых функций контурными интегралами (226). 62. Примеры интегралов от многозначных функций (230). 63. Интегрирование системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами (234). 64. Разложение дробной функции на простейшие дроби (240). 65. Функция  $\operatorname{sig} z$  (244). 66. Построение мероморфной функции (246). 67. Целые функции (248). 68. Бесконечные произведения (250). 69. Построение целой функции по ее корням (253). 70. Интегралы, зависящие от параметра (257). 71. Эйлеров интеграл второго рода (260). 72. Эйлеров интеграл первого рода (265). 73. Бесконечное произведение для функции  $[\Gamma(z)]^{-1}$  (266). 74. Представление  $\Gamma(z)$  контурным интегралом (272). 75. Формула Стирлинга (275). 76. Формула суммирования Эйлера (281). 77. Числа Бернулли (284). 78. Метод скорейшего спуска (286). 79. Выделение главной части интеграла (288). 80. Примеры (295).

### Г л а в а IV

#### ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ФУНКЦИИ МАТРИЦ

81. Регулярные функции многих переменных (305). 82. Двойной интеграл и формула Коши (305). 83. Степенные ряды (308). 84. Аналитическое продолжение (314). 85. Функции матриц. Предварительные понятия (315). 86. Степенные ряды от одной матрицы (316). 87. Умножение степенных рядов. Обращение степенного ряда (320). 88. Дальнейшее исследование сходимости (323). 89. Интерполяционные полиномы (328). 90. Тождество Кейли и формула Сильвестера (330). 91. Аналитическое продолжение (332). 92. Примеры многозначных функций (335). 93. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами (338). 94. Функции нескольких матриц (343).

### Г л а в а V

#### ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

95. Разложение решения в степенной ряд (347). 96. Аналитическое продолжение решения (351). 97. Окрестность особой точки (353). 98. Регулярная особая точка (358). 99. Уравнения класса Фукса (365).

100. Уравнение Гаусса (369). 101. Гипергеометрический ряд (371). 102. Полиномы Лежандра (376). 103. Полиномы Якоби (382). 104. Конформное преобразование и уравнение Гаусса (386). 105. Иррегулярные особые точки (391). 106. Асимптотические разложения (394). 107. Преобразование Лапласа (397). 108. Различный выбор решений (399). 109. Асимптотическое представление решений (403). 110. Сравнение полученных результатов (409). 111. Уравнение Бесселя (410). 112. Функции Ханкеля (414). 113. Функции Бесселя (419). 114. Преобразование Лапласа в более общих случаях (420). 115. Обобщенные полиномы Лагерра (422). 116. Положительные значения параметра (426). 117. Вырождение уравнения Гаусса (427). 118. Уравнения с периодическими коэффициентами (430). 119. Случай аналитических коэффициентов (436). 120. Системы линейных дифференциальных уравнений (437). 121. Регулярная особая точка (440). 122. Регулярные системы (443). 123. Представление решения в окрестности особой точки (449). 124. Канонические решения (452). 125. Связь с регулярными решениями типа Фукса (455). 126. Случай любых  $U_s$  (456). 127. Разложение вблизи иррегулярной особой точки (460). 128. Разложения в равномерно сходящиеся ряды (469).

## ГЛАВА VI

### СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

- § 1. Сферические функции и функции Лежандра . . . . . 477
129. Определение сферических функций (477). 130. Явные выражения сферических функций (480). 131. Свойство ортогональности (484). 132. Полиномы Лежандра (487). 133. Разложение по сферическим функциям (492). 134. Доказательство сходимости (496). 135. Связь сферических функций с предельными задачами (498). 136. Задачи Дирихле и Неймана (500). 137. Потенциал объемных масс (503). 138. Потенциал сферического слоя (505). 139. Электрон в центральном поле (508). 140. Шаровые функции и линейные представления группы вращения (510). 141. Функция Лежандра (512). 142. Функция Лежандра второго рода (514).
- § 2. Функции Бесселя . . . . . 519
143. Определение функций Бесселя (519). 144. Соотношения между функциями Бесселя (521). 145. Ортогональность функций Бесселя и их корни (524). 146. Производящая функция и интегральное представление (529). 147. Формула Фурье—Бесселя (533). 148. Функции Ханкеля и Неймана (534). 149. Разложение функций Неймана с целым значением (540). 150. Случай чисто мнимого аргумента (542). 151. Интегральные представления (544). 152. Асимптотические разложения (546). 153. Функции Бесселя и уравнение Лапласа (555). 154. Волновое уравнение в цилиндрических координатах (557). 155. Волновое уравнение в сферических координатах (560).

<b>§ 3. Полиномы Эрмита и Лагерра</b> . . . . .	564
156. Линейный осциллятор и полиномы Эрмита (564).	
157. Свойство ортогональности (567).	
158. Производящая функция (568).	
159. Параболические координаты и функции Эрмита (570).	
160. Полиномы Лагерра (573).	
161. Связь полиномов Эрмита и Лагерра (576).	
162. Асимптотическое выражение полиномов Эрмита (577).	
163. Асимптотическое выражение полиномов Лежандра (580).	
<b>§ 4. Эллиптические интегралы и эллиптические функции</b> . . . . .	584
164. Приведение эллиптических интегралов к нормальному виду (584).	
165. Приведение интегралов к тригонометрической форме (587).	
166. Примеры (591).	
167. Обращение эллиптического интеграла (593).	
168. Общие свойства эллиптических функций (597).	
169. Основная лемма (601).	
170. Функция Вейерштрасса (603).	
171. Дифференциальное уравнение для $\wp(u)$ (608).	
172. Функции $\sigma_k(u)$ (610).	
173. Разложение целой периодической функции (613).	
174. Новые обозначения (615).	
175. Функция $\vartheta_1(v)$ (616).	
176. Функции $\vartheta_k(v)$ (619).	
177. Свойства функций $\eta$ (622).	
178. Выражение чисел $e_k$ через $\vartheta_s$ (625).	
179. Эллиптические функции Якоби (628).	
180. Основные свойства функций Якоби (630).	
181. Дифференциальные уравнения для функций Якоби (631).	
182. Формулы сложения (632).	
183. Связь функций $\wp(u)$ и $\operatorname{sn}(u)$ (634).	
184. Эллиптические координаты (636).	
185. Введение эллиптических функций (637).	
186. Уравнение Лямэ (639).	
187. Простой маятник (641).	
188. Пример конформного преобразования (643).	

#### Д О Б А В Л Е Н И Е

#### ПРИВЕДЕНИЕ МАТРИЦ К КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

189. Вспомогательные предложения (645).	
190. Случай простых корней (651).	
191. Первый этап преобразований в случае кратных корней (653).	
192. Приведение к канонической форме (656).	
193. Определение структуры канонической формы (662).	
194. Пример (666).	
Алфавитный указатель . . . . .	671