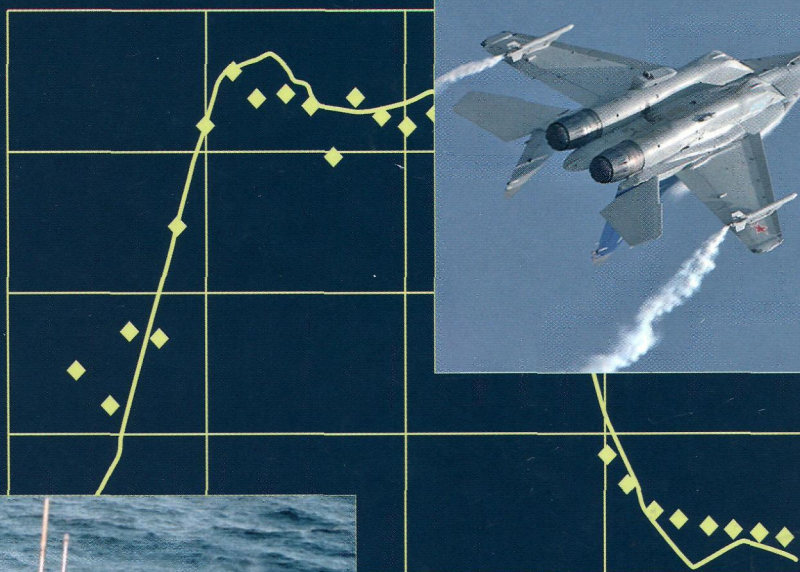


А.М. ЛИПАНОВ

# Теоретическая гидромеханика НЬЮТОНОВСКИХ сред



НАУКА

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

А.М. ЛИПАНОВ

**Т**еоретическая  
гидромеханика  
НЬЮТОНОВСКИХ  
сред



МОСКВА НАУКА 2011

УДК 532  
ББК 22.253.3  
Л61



*Издание осуществлено при финансовой поддержке  
Российского фонда фундаментальных исследований  
по проекту № 10-01-07052*

Рецензенты:

академик *В.А. Левин*,  
член-корреспондент РАН *Б.Н. Четверушкин*

### **Липанов А.М.**

Теоретическая гидромеханика ньютоновских сред / А.М. Липанов ; Ин-т приклад. механики УрО РАН. – М. : Наука, 2011. – 551 с. – ISBN 978-5-02-037481-2.

В книге получены уравнения гидромеханики для сжимаемых и несжимаемых сред в декартовых и ортогональных криволинейных координатах. Разработаны методы численного решения уравнений гидромеханики как для ламинарных, так и для турбулентных диапазонов изменения гидромеханических параметров. Выполнены методические и параметрические исследования стационарных и нестационарных ламинарных течений и турбулентных потоков, а также процессов перехода от ламинарных течений к турбулентным и обратно. Получено хорошее соответствие с имеющимися результатами других авторов и экспериментальными данными для корреляционных моментов пульсационных составляющих гидромеханических параметров и осредненных величин.

Для специалистов в области гидромеханики турбулентных потоков, энергетики, инженеров и конструкторов летательных аппаратов.

ISBN 978-5-02-037481-2

© Институт прикладной механики УрО РАН, 2011

© Липанов А.М., 2011

© Редакционно-издательское оформление.

Издательство «Наука», 2011

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>1. ВВЕДЕНИЕ .....</b>	<b>3</b>
<b>2. УРАВНЕНИЯ ГИДРОМЕХАНИКИ.....</b>	<b>6</b>
<b>2.1. Введение .....</b>	<b>6</b>
<b>2.2. Немного об истории обоснования законов сохранения .....</b>	<b>7</b>
<b>2.3. Уравнение неразрывности.....</b>	<b>11</b>
2.3.1. Уравнение неразрывности в декартовых прямоугольных координатах .....	13
2.3.2. Уравнение неразрывности в цилиндрических координатах .....	15
2.3.3. Уравнение неразрывности в сферических координатах .....	18
2.3.4. Уравнение неразрывности для произвольной системы криволинейных ортогональных координат .....	22
<b>2.4. Уравнения импульса .....</b>	<b>25</b>
2.4.1. Краткий исторический экскурс .....	25
2.4.2. Массовые и поверхностные силы .....	28
2.4.3. Общее выражение для уравнения импульса .....	30
2.4.4. Гидромеханическое давление .....	31
2.4.5. Начальный этап вывода уравнений импульса .....	34
2.4.6. Перемещение, вращение и деформация частиц .....	37
2.4.7. Чистая деформация .....	43
2.4.8. О характере деформирования эллипсоида вдоль главных его осей .....	56
2.4.9. Главные скорости деформации эллипсоида деформации .....	59
2.4.10. Соотношение между тензором вязких напряжений и тензором скоростей деформации .....	61
2.4.11. Завершающий этап вывода скалярных уравнений импульса.....	70
<b>2.5. Уравнение импульса в криволинейных ортогональных координатах...</b>	<b>73</b>
<b>2.6. Уравнения импульса в адаптивных цилиндрических координатах .....</b>	<b>95</b>
2.6.1. Адаптивные цилиндрические координаты для канала овальной формы .....	114
2.6.2. Адаптивные цилиндрические координаты для изогнутого канала с овальным контуром в поперечном сечении.....	121
2.6.3. Адаптивные цилиндрические координаты в каналах с винтообразной осевой линией.....	137
<b>2.7. Уравнения импульса для адаптивных сферических координат.....</b>	<b>141</b>

2.8. Уравнение энергии .....	153
2.8.1. Уравнение энергии в декартовых координатах.....	158
2.8.2. Уравнение энергии для ортогональных криволинейных координат ...	168
<b>3. ПЕРЕХОД К БЕЗРАЗМЕРНЫМ ПЕРЕМЕННЫМ.....</b>	<b>195</b>
3.1. Уравнение неразрывности.....	198
3.2. Уравнения импульса .....	199
3.3. Уравнение энергии .....	206
<b>4. НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ .....</b>	<b>214</b>
4.1. О точных и приближенных соотношениях на границах ОИ.....	222
<b>5. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИДРО- МЕХАНИКИ .....</b>	<b>227</b>
<b>5.1. Расчет частных производных от ГМП по пространственным коор-     динатам.....</b>	<b>230</b>
5.1.1. Алгоритм определения градиентов ГМП .....	234
5.1.2. Порядок расчета однонаправленных нечетных частных производ- ных по пространственным координатам .....	237
5.1.3. Алгоритм определения вторых однонаправленных частных про- изводных по пространственным координатам .....	239
5.1.4. Алгоритм расчета четных однонаправленных частных производ- ных выше второго порядка по пространственным координатам ...	242
5.1.5. Алгоритм расчета смешанных производных по пространствен- ным координатам .....	245
5.1.6. Порядок расчета частных производных по пространственным координатам на границах объемов интегрирования и в окрест- ности границ .....	246
5.1.6.1. Алгоритм расчета частных производных от ГМП в при- граничных точках и на границах ОИ с использованием фиктивных точек.....	247
5.1.6.2. Порядок расчета частных производных от ГМП в пригра- ничных точках и на границе ОИ без использования фик- тивных точек .....	251
5.1.7. О порядке расчета несимметричных частных производных от ГМП по пространственным координатам .....	262
5.1.8. Матрицы Залесака .....	265
5.1.9. Матрицы уравнений, используемых при расчете асимметричных частных производных.....	275
5.1.10. Матрицы уравнений, используемых при расчете асимметричных частных производных, переходящих в симметричные.....	290
5.1.11. Алгоритм расписывания характеристического уравнения к поли- номиальному виду .....	305
<b>5.2. Численное интегрирование уравнений гидромеханики во времени..</b>	<b>313</b>
5.2.1. Метод численного решения уравнений гидромеханики для лами- нарного диапазона изменения ГМП.....	313

5.2.2. Метод численного решения уравнения гидромеханики для турбулентного диапазона изменения ГМП.....	321
<b>5.3. Матрицы Якоби .....</b>	<b>331</b>
5.3.1. Анализ матриц Якоби конвективных слагаемых уравнений гидромеханики .....	332
5.3.2. Анализ матриц Якоби, соответствующих процессам диссипации энергии и ее молекулярного переноса.....	351
<b>5.4. Ряды Тэйлора при расчете компонент вектора <math>Q</math> на <math>(n + 1)</math>-м временном слое .....</b>	<b>371</b>
<b>5.5. Численное интегрирование во времени уравнений гидромеханики для несжимаемых сред.....</b>	<b>388</b>
<b>6. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ МЕТОДИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ.....</b>	<b>399</b>
6.1. О шаге интегрирования уравнений гидромеханики во времени .....	399
6.2. О разностной сетке при решении уравнений гидромеханики и о порядке аппроксимации при расчете частных производных по пространственным переменным .....	400
6.3. О порядке аппроксимирующего выражения при переходе с $n$ -го временного слоя на $(n + 1)$ -й в процессе интегрирования уравнений гидромеханики по времени .....	412
6.4. О ширине канала .....	414
6.5. О трехмерном начальном возмущении.....	415
6.6. О распараллеливании вычислительного процесса .....	416
<b>7. РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ВЯЗКИХ ПОТОКОВ.....</b>	<b>419</b>
7.1. Ламинарные потоки вязкого газа .....	419
7.1.1. Симметричные ламинарные потоки.....	419
7.1.2. Асимметричные ламинарные стационарные потоки .....	432
7.2. Нестационарные ламинарные течения .....	440
7.3. Процессы, переходные от ламинарных к турбулентным.....	445
7.4. Турбулентные потоки.....	452
7.5. Об аналогии между турбулентными процессами и стационарными случайными функциями .....	459
7.6. О функциональной зависимости между различными точками пространства .....	479
7.7. Распределение ГМП между обтекаемыми горизонтальными поверхностями .....	481
7.8. О пограничных слоях.....	493
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....</b>	<b>495</b>
<b>ЛИТЕРАТУРА.....</b>	<b>497</b>

## Приложение

### НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ВЕКТОРНОГО И ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЙ .....

500

#### 1. Векторная алгебра .....

500

##### 1.1. Операции над векторами .....

501

#### 2. Векторный анализ .....

516

##### 2.1. Некоторые дифференциальные формулы векторного анализа .....

516

##### 2.2. Криволинейные координаты .....

522

#### 3. Тензорный анализ .....

529

##### 3.1. Алгебраические операции с тензорами .....

529

##### 3.2. Дивергенция тензора .....

537

##### 3.3. Компоненты тензора скоростей деформации в криволинейных координатах .....

543