

Е.И. Михайловский

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МОДЕЛИ
МЕХАНИКИ
УПРУГИХ
ТЕЛ**



Федеральное агентство по образованию
Сыктывкарский государственный университет

Е.И. Михайловский

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МОДЕЛИ МЕХАНИКИ
УПРУГИХ ТЕЛ



Сыктывкар
2007

УДК 51-72:539.3

ББК 22.31

М 69

Михайловский Е.И.

М 69 Математические модели механики упругих тел.
Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского университета, 2007. 516 с.

В монографии наряду с кратким изложением современной теории упругости последовательно строятся линейные и нелинейные, классические и уточненные математические модели механики стержней, пластин и оболочек. Получен ряд новых результатов, в том числе полудеформационный вариант граничных величин для квадратичных теорий пластин и оболочек, уточненная нелинейная теория жестко-гибких оболочек и основанный на ней экспресс-алгоритм учета трансверсальных деформаций в кирхгофовских разновидностях теории оболочек.

Книга предназначена для специалистов в области механики деформируемого твердого тела, а также студентов и аспирантов математических направлений и специальностей.

Библиогр. 135 назв. Ил. 54. Табл. 6.

Технический редактор к.ф.-м.н. В.В. Миронов
Литературный редактор к.филол.н. Л.В. Гудырева

Бумага офсетная. Формат 60x90^{1/16}

Усл.п.л. 32,25.

Заказ № 0836. Тираж 500.

РИО СыктГУ.

167001, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., 55.

Отпечатано с готового оригинал-макета
в ОАО "Кировская областная типография"
610000, г. Киров, Динамовский пр-д, 4.

Т/ф.: (8332) 32-28-48. E-mail: market@kot.kirov.ru

ISBN 978-5-87237-551-7

© Михайловский Е.И., 2007
© Сыктывкарский ун-т, 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	12
1. Основные деформационные зависимости	23
1.1. Описание кинематики сплошной среды (традиционный подход)	23
1.2. Основные меры деформации	44
1.2.1. Классические тензорные функции	44
1.2.2. Полярное разложение тензора	49
1.2.3. Основные тензоры деформации	51
2. Уравнения движения. Сопряженные пары тензоров	57
2.1. Вспомогательные соотношения	57
2.2. Тензор истинных напряжений Коши	59
2.3. Уравнения движения	62
2.4. Работа напряжений. Энергетически соответствующие пары тензоров	65
3. Законы упругости для изотропных материалов	71
3.1. О формах связи между симметричными тензорами 2-го ранга	71
3.1.1. Предварительные замечания	71

3.1.2. Зависимость между девиаторами 1-го и 2-го уровней	73
3.1.3. Геометрический способ решения характеристического уравнения симметричного тензора	77
3.1.4. Формальная связь между соосными симметричными тензорами 2-го ранга	83
3.2. Общий вид законов упругости для изотропных материалов	86
3.3. Законы упругости для несжимаемых материалов	91
3.4. Закон Гука и его обобщение на большие деформации	92
3.4.1. Геометрически линейные зависимости	92
3.4.2. Закон Гука	96
3.4.3. Об одном способе конструирования упругих потенциалов	100
3.5. Определяющие уравнения упругости для эластомеров	104
3.5.1. Статистический подход к построению упругих потенциалов	104
3.5.2. Феноменологический подход	105
4. Основы линейной теории упругости	111
4.1. Сводка исходных уравнений	111
4.2. Уравнения теории упругости в перемещениях	112

4.3. Уравнения теории упругости в напряжениях. Формулы Чезаро.....	115
4.4. Основные теоремы	119
4.4.1. Теоремы Бетти и Максвелла о взаимности работ	119
4.4.2. Теоремы Клапейрона и Кирхгофа	123
4.5. Вариационные принципы теории упругости	126
4.5.1. Некоторые предварительные сведения.....	126
4.5.2. Общий вариационный принцип	131
4.5.3. Частные вариационные принципы	133
4.5.3.1. Принцип Рейсснера	133
4.5.3.2. Принцип Лагранжа	134
4.5.3.3. Распространение принципа Лагранжа на нелинейную теорию	136
4.5.3.4. Принцип Кастильяно	138
4.6. Задача Сен-Венана об изгибе и кручении призм	141
4.6.1. Полуобратный метод и постановка задачи Сен-Венана	141
4.6.2. Чистый изгиб стержня.....	145
4.6.3. Техническая теория балок	147
4.6.4. Кручение призм.....	163
4.7. Плоская задача теории упругости	168
4.7.1. Плоская деформация	168
4.7.2. Плоское напряженное состояние	173

5. Теория изгиба пластин	179
5.1. Классическая теория плоских пластин	179
5.1.1. Вывод разрешающего уравнения	179
5.1.2. К формулировке граничных условий	184
5.1.3. Ребристая пластина. Регулярная стержневая решетка	195
5.2. Теория плоских пластин типа Кáрмана-Тимошенко	200
5.2.1. Вывод уравнений равновесия	200
5.2.2. Преобразование уравнений равновесия	203
5.2.3. Граничные величины. (традиционный вариант)	207
5.2.4. Полудеформационный вариант граничных величин	208
5.2.5. Уравнения теории пластин типа Кáрмана-Тимошенко в полярных координатах	213
5.3. Вывод полевых уравнений линейной теории плоских пластин по алгоритму Новожилова- Финкельштейна	216
6. Основные соотношения нелинейной теории упругости в криволинейных координатах	223
6.1. Криволинейные координаты	223
6.2. Деформационные соотношения	232

6.3. Сопряженные пары тензоров	234
6.4. Ковариантное дифференцирование в евклидовом пространстве E_3	236
6.5. Ковариантное дифференцирование в деформированном теле	245
6.6. Об уравнениях равновесия	255
6.7. Законы упругости	263
7. Некоторые сведения из теории поверхностей	267
7.1. Элементы тензорного анализа на поверхности	268
7.1.1. Основные тензоры поверхности	268
7.1.2. Ковариантное дифференцирование на поверхности	276
7.1.3. Уравнения Гаусса и Петерсона-Кодацци. Повторное ковариантное дифференцирование	281
7.2. Линии на поверхности	284
7.2.1. Основные соотношения для линии на поверхности	284
7.2.2. Геодезические линии	288
7.2.3. Линии кривизны. Асимптотические линии	291
7.2.4. Ортогональные координаты. Физические компоненты	298

7.3. Ковариантное дифференцирование на деформированных поверхностях	301
7.4. Формулы интегрирования по частям	310
7.5. Некоторые соотношения и обозначения для деформированной срединной поверхности оболочки	313
7.5.1. Деформация срединной поверхности оболочки	313
7.5.2. Деформация линии на срединной поверхности	316
8. Классическая линейная теория оболочек	319
8.1. Уравнения неразрывности деформаций срединной поверхности оболочки	320
8.2. Уравнения равновесия	326
8.2.1. Вспомогательные соотношения	326
8.2.2. Полевые уравнения равновесия	327
8.2.3. Операторная форма записи полевых уравнений равновесия	330
8.2.4. Граничные уравнения равновесия	332
8.3. Статико-геометрическая аналогия в полевых уравнениях	335
8.4. Закон Гука	338
8.5. Распространение статико-геометрической аналогии на граничные величины	342

8.6. Вывод уравнений неразрывности из уравнений равновесия	355
9. Уточненная нелинейная теория оболочек	361
9.1. Некоторые замечания исторического характера	361
9.2. Вариационный вывод уравнений равновесия	367
9.2.1. Полевые уравнения равновесия	367
9.2.2. Функции напряжения	377
9.2.3. Приведение уравнений равновесия к каноническому виду	382
9.2.4. О формулировке граничных уравнений равновесия	386
9.3. Деформационные граничные величины	395
10. Теория оболочек типа М-Т-N	399
10.1. Построение теории типа М-Т-N на основе принципа Лагранжа	399
10.1.1. Основные геометрические и статические соотношения	399
10.1.2. Вывод полевых уравнений	405
10.1.3. К составлению граничных уравнений	409

10.1.4. Полудеформационный вариант граничных величин	410
10.2. Экспресс-алгоритм учета трансверсальных деформаций в кирхгофовских теориях оболочек	413
10.2.1. Вывод уравнений теории оболочек типа М-Т-Н с использованием экспресс-алгоритма	414
10.2.2. Уточненные уравнения теории цилиндрических оболочек	417
11. Оболочки, подкрепленные ребрами	425
11.1. Деформация стержня по сдвиговой модели Тимошенко	425
11.2. Закон упругости для стержня	429
11.3. Граничные условия для края оболочки, подкрепленного тонким стержнем	434
11.3.1. Силовые условия сопряжения оболочки и стержня	434
11.3.2. Граничные условия подкрепленного края	436
11.4. Нелинейная теория типа Тимошенко-Рейсснера жесткогибких ребристых оболочек	439
11.4.1. Оболочка, подкрепленная дискретной системой ребер	439

11.4.2. Конструктивно-анизотропные оболочки	442
11.4.3. Континуальные уравнения стержневых решеток	444
Некоторые ПРИЛОЖЕНИЯ , связанные с анализом математических моделей	447
П1. Устойчивость продольно сжимаемого стержня	448
П2. Продольный изгиб стержня с жесткими ограничениями на прогибы	456
П3. Контактная задача со свободной границей для поперечно изгибаемой балки	464
П4. О погрешности уравнений теории тонких упругих оболочек	472
П5. О влиянии учета поперечных сдвигов на напряженное состояние открытой цилиндрической оболочки	476
Библиографический список	490
Summary	507
Contents	508