

А.А. БОРОВКОВ

**АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ**

Быстро убывающие распределения приращений

А.А. БОРОВКОВ

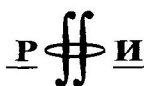
АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

Быстро убывающие распределения приращений



Москва
Физматлит
2013

УДК 519
ББК 22.17
Б 83



*Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 13-01-07011,
не подлежит продаже*

БОРОВКОВ А.А. Асимптотический анализ случайных блужданий. Быстро убывающие распределения приращений. — М.: Физматлит, 2013. — 448 с. ISBN 978-5-94052-231-7 (в пер.)

Книга посвящена изучению асимптотических приближений для вероятностей редких событий (больших отклонений) траекторий разного рода случайных блужданий. Полученные результаты представляют как теоретический, так и прикладной интерес. Вычисление асимптотики вероятностей больших отклонений позволяет находить малые вероятности ошибок при решении задач математической статистики, малые вероятности разорения в теории риска, малые вероятности переполнения буфера в теории очередей и т.д. Оказалось, что характер результатов и методы исследований названного круга задач совершенно различны для медленно убывающих на бесконечности распределений скачков блуждания и для быстро убывающих. В каждом из этих двух случаев требуется разработка собственной методологии и математического аппарата. Первому случаю посвящена монография А.А.Боровкова и К.А.Боровкова «Асимптотический анализ случайных блужданий» (М.: Физматлит, 2008). Она имеет подзаголовок «Медленно убывающие распределения скачков». Настоящая книга имеет то же название и подзаголовок «Быстроубывающие распределения приращений». Более точно, в книге предполагается, что скачки случайных блужданий имеют распределения, убывающие на бесконечности экспоненциальным или более быстрым образом (удовлетворяют моментному условию Крамера).

Первые классические результаты в теории больших отклонений для сумм случайных величин восходят к работам Крамера и были получены для быстроубывающих распределений. Изучение вероятностей редких событий более сложной природы потребовало разработки новых подходов и довольно сложного математического аппарата.

В книге впервые в монографической литературе систематически и весьма полно излагаются существующие общие методы исследования проблем, связанных с большими отклонениями случайных блужданий. В ней заполнены многие существовавшие до сих пор пробелы.

Книга рассчитана на научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, знакомых с основами теории вероятностей.

ISBN 978-5-94052-231-7

© Боровков А.А., 2013
© Физматлит (оформление), 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	7
ГЛАВА 1	
ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ	15
1.1. Функция уклонений в одномерном случае и ее свойства	15
1.1.1. Условия Крамера (15). 1.1.2. Функция уклонений (17).	
1.2. Функция уклонений в многомерном случае и ее свойства	28
1.2.1. Условия Крамера (28). 1.2.2. Функция уклонений (28).	
1.3. Экспоненциальные неравенства чебышевского типа для сумм случайных векторов...	33
1.3.1. Основные неравенства для случайных векторов (33). 1.3.2. Доказательства теорем 1.3.1–1.3.4 (36). 1.3.3. Неравенства для сумм случайных векторов (38). 1.3.4. Дополнение. Усиление экспоненциальных неравенств для невыпуклых множеств (39).	
1.4. Свойства случайной величины $\gamma = \Lambda(\xi)$ и ее функции уклонений	40
1.4.1. Инвариантность величины γ при линейном преобразовании над ξ (40). 1.4.2. Свойства случайной величины γ и функции $\Lambda^{(\gamma)}$ в одномерном случае $d = 1$ (41). 1.4.3. Свойства случайной величины γ и функции $\Lambda^{(\gamma)}$ в случае $d > 1$ (44).	
1.5. Интегро-локальные теоремы Стоуна–Шеппа и локальная теорема Гнеденко.....	48
1.5.1. Об интегро-локальных теоремах (48). 1.5.2. Теорема Стоуна–Шеппа и теорема Гнеденко (49). 1.5.3. Равномерные версии теорем 1.5.1, 1.5.2 (52). 1.5.4. О многомерных интегро-локальных теоремах (54).	
ГЛАВА 2	
АППРОКСИМАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	56
2.1. Преобразование Крамера. Формула редукции	56
2.1.1. Одномерный случай (56). 2.1.2. Многомерный случай (59).	
2.2. Интегро-локальные и интегральные предельные теоремы для сумм случайных величин в крамеровской зоне уклонений. Асимптотическая плотность	61
2.3. Дополнения к § 2.2.....	68
2.3.1. Локальные теоремы в одномерном случае (68). 2.3.2. Интегро-локальные теоремы в многомерном случае. Крамеровская зона уклонений (69). 2.3.3. Большие и сверхбольшие уклонения в многомерном случае. Общие теоремы (74). 2.3.4. Большие и сверхбольшие уклонения для трех классов одномерных распределений (77).	
2.4. Интегро-локальные теоремы на границе крамеровской зоны.....	83
2.4.1. Введение (83). 2.4.2. Вероятности больших уклонений S_n , расположенных в $o(n)$ -окрестности точки α_+n ; случай $\psi''(\lambda_+) < \infty$ (84). 2.4.3. Вероятность больших уклонений S_n в $o(n)$ -окрестности точки α_+n для распределений F из класса \mathcal{ER} в случае $\psi''(\lambda_+) = \infty$ (86). 2.4.4. Многомерный случай. Большие уклонения вблизи границы крамеровской области, когда вектор $A'(\lambda_+)$ и матрица $A''(\lambda_+)$ существуют (88).	
2.5. Интегро-локальные теоремы вне крамеровской зоны	89

2.5.1.	Одномерный случай. Классы распределений \mathcal{ER} с параметром $\beta < -3$ (89).	
2.5.2.	Класс \mathcal{ER} с параметром $\beta \in (-3, -2)$ (92).	
2.6.	Дополнение к § 2.5. Многомерный случай. Класс распределений \mathcal{ER}	94
2.7.	Принципы больших уклонений.....	100
2.7.1.	Локальный принцип больших уклонений (л.п.б.у.) в одномерном случае (100).	
2.7.2.	Принцип больших уклонений в одномерном случае (104).	
2.7.3.	Многомерный случай (106).	
2.8.	Предельные теоремы для сумм случайных величин с одним или несколькими неоднородными слагаемыми.....	109
2.8.1.	Интегро-локальные теоремы (109).	
2.8.2.	Неравенства в одномерном случае (112).	
2.8.3.	Неравенства в многомерном случае (114).	
2.8.4.	Принципы больших уклонений (115).	
2.9.	Асимптотика функции восстановления и смежные задачи. Вторая функция уклонений.....	116
2.9.1.	Введение (116).	
2.9.2.	Вторая функция уклонений и ее свойства (117).	
2.9.3.	Предельные теоремы (123).	
2.10.	Интегро-локальные и локальные теоремы о нормальных и больших уклонениях сумм разнораспределенных случайных величин в схеме серий.....	129
2.10.1.	Введение (129).	
2.10.2.	Распространение теорем Гнеденко и Стоуна–Шеппа на суммы разнораспределенных слагаемых в области нормальных уклонений (129).	
2.10.3.	Доказательство теоремы 2.10.1 (135).	
2.10.4.	Доказательства теорем 2.10.2, 2.10.3 (138).	
2.10.5.	Предельные теоремы для вероятностей больших уклонений. Постановка задачи и основная интегро-локальная теорема (139).	
2.10.6.	Умеренно большие уклонения (144).	
2.10.7.	Локальные теоремы (147).	

ГЛАВА 3

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ..... 150

3.1.	Предельные теоремы для распределения скачков при фиксированном конце траектории. Вероятностный смысл преобразования Крамера.....	151
3.2.	Условные принцип инвариантности и закон повторного логарифма.....	153
3.2.1.	Условный принцип инвариантности (153).	
3.2.2.	Условный закон повторного логарифма (160).	
3.2.3.	Условный закон повторного логарифма «в обратном направлении» (164).	
3.3.	Задача о пересечении границы.....	165
3.3.1.	Асимптотическая близость распределений (165).	
3.3.2.	Задача с границей (167).	
3.4.	Время первого прохождения высокого уровня и величина перескока (экссесса).....	170
3.4.1.	Локальные теоремы (170).	
3.4.2.	Интегральные теоремы для времени первого прохождения высокого уровня и для максимума последовательных сумм (172).	
3.4.3.	Арифметический случай (180).	
3.4.4.	Дополнение. Вероятности больших уклонений \bar{S}_n вне крамеровской зоны. (Условие Крамера может не выполняться (182).	
3.5.	Асимптотика распределений времен первого прохождения горизонтальной фиксированной границы.....	184
3.5.1.	Общие свойства величин η_{\pm} в случае $D_- = \infty$, $D < \infty$ (186).	
3.5.2.	Асимптотические свойства величин η_{\pm} в случае $a = \mathbf{E}\xi < 0$, когда правый хвост распределения величины ξ принадлежит классам \mathcal{R} или \mathcal{Se} (191).	
3.5.3.	Асимптотические свойства величин η_{\pm} в случае $a = \mathbf{E}\xi < 0$, когда выполнено условие $[\mathbf{C}_+]$ (193).	
3.5.4.	Свойства величин $\eta_-(x)$ при фиксированном $x \geq 0$ в случае $D_+ = D_- = \infty$ (197).	
3.5.5.	Свойства величин $\eta_{\pm}(x)$ при фиксированном уровне $x \geq 0$ (200).	
3.6.	Асимптотически линейные границы.....	202
3.7.	Пересечение нормированной траекторией случайного блуждания криволинейной границы.....	203

3.7.1. Локальная теорема для времени первого прохождения (204).	3.7.2. Линии уровня (205).	3.7.3. Задача о пересечении произвольной границы (208).	3.7.4. Вероятность не пересечь границу (216).
3.8.	Дополнение. Граничные задачи в многомерном случае 218		
3.8.1.	Введение (218).		
3.8.2.	Время и место первого попадания в множество tB в случае, когда $a = E\xi \neq 0$ и луч $\{ua : u \geq 0\}$ пересекает множество B (219).		
3.8.3.	Локальные теоремы для η, θ, χ при произвольном взаимном расположении вектора $a = E\xi$ и множества B (227).		
3.8.4.	Интегральные теоремы для момента достижения $\eta(tB)$ (230).		
3.9.	Дополнение. Аналитические методы исследования граничных задач с прямолинейными границами 233		
3.9.1.	Введение (233).		
3.9.2.	V -факторизация и явный вид двойных преобразований $u^y(z, \lambda)$ (234).		
3.9.3.	Обращение двойных преобразований (239).		
3.9.4.	Результаты асимптотического анализа. Время первого прохождения (242).		
3.9.5.	Совместное распределение \bar{S}_n и S_n (244).		
3.9.6.	Распространение метода факторизации решения граничных задач на другие объекты (245).		
3.10.	Отыскание числовых значений вероятностей больших уклонений 246		
3.10.1.	Последовательные приближения для значений $\lambda(\alpha)$, $\Lambda(\alpha)$, $\sigma(\alpha)$ (246).		
3.10.2.	Последовательные приближения для значений λ_1 , α_1 , p (см. (3.10.1)) (248).		

ГЛАВА 4

ПРИНЦИПЫ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ТРАЕКТОРИЙ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЙ	252
4.1.	О принципах больших уклонений в метрических пространствах 252
4.2.	Функционал (интеграл) уклонений для траекторий случайных блужданий и его свойства 264
4.2.1.	Интеграл уклонений в одномерном случае $d = 1$ (265).
4.2.2.	Доказательства (272).
4.2.3.	Интеграл уклонений в случае $d \geq 1$ (282).
4.3.	Экспоненциальные неравенства чебышевского типа для траекторий случайных блужданий 285
4.4.	Принципы больших уклонений для непрерывных траекторий случайных блужданий. Усиленные версии 290
4.4.1.	Усиленная версия «обычного» п. б. у. для траекторий случайных блужданий (290).
4.5.	Расширенная постановка задачи 303
4.5.1.	Пример, приводящий к расширенному принципу больших уклонений (303).
4.5.2.	Траектории \bar{s}_n (307).
4.6.	Принципы больших уклонений в пространстве функций без разрывов второго рода .. 311
4.6.1.	Формулировки основных результатов (311).
4.6.2.	Доказательство теоремы 4.6.1 (312).
4.6.3.	Оценки сверху (312).
4.6.4.	Оценка снизу (318).
4.6.5.	Доказательство теоремы 4.6.2 (318).
4.6.6.	Доказательство теоремы 4.6.3 (320).
4.6.7.	Дополнение. Принципы больших уклонений в пространстве (\mathbb{D}, ρ) в случае $d \geq 1$ (320).
4.7.	Дополнение. Принципы больших уклонений в пространстве (\mathbb{V}, ρ_V) 321
4.7.1.	Пространство \mathbb{V} и метрика ρ_V (321).
4.7.2.	Вполне ограниченные множества в пространстве (\mathbb{V}, ρ_V) (324).
4.7.3.	Л. п. б. у. и р. п. б. у. в пространстве (\mathbb{V}, ρ_V) (324).
4.8.	Условные принципы больших уклонений в пространстве (\mathbb{D}, ρ) 326
4.8.1.	Условные п. б. у. в пространстве (\mathbb{D}, ρ) (326).
4.8.2.	Условные п. б. у. с концом траектории, локализованным в более узкой области (332).
4.9.	Распространение ряда результатов на процессы с независимыми приращениями 335
4.9.1.	Неравенства (337).
4.9.2.	Принципы больших уклонений (342).
4.9.3.	Условные принципы больших уклонений (347).
4.9.4.	Версии теоремы Санова (348).
4.10.	О принципах больших уклонений для обобщенных процессов восстановления 352
4.11.	О принципах больших уклонений для сумм случайных величин, заданных на конечной цепи Маркова 363

ГЛАВА 5

ПРИНЦИПЫ УМЕРЕННО БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ТРАЕКТОРИЙ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЙ И ПРОЦЕССОВ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ	366
5.1. Принципы умеренно больших уклонений для сумм S_n	366
5.1.1. Моментные условия и соответствующие им зоны уклонений (366). 5.1.2. Принципы умеренно больших уклонений для сумм S_n (368). 5.1.3. Доказательство теоремы 5.1.1 (369). 5.1.4. Доказательство теоремы 5.1.2 (373).	
5.2. Принципы умеренно больших уклонений для траекторий s_n	374
5.2.1. Формулировки результатов (374). 5.2.2. Доказательство теоремы 5.2.1 (377). 5.2.3. Доказательство теоремы 5.2.2 (380).	
5.3. Принцип умеренно больших уклонений для процессов с независимыми приращениями	382
5.3.1. Формулировки основных утверждений (382). 5.3.2. Доказательство теорем 5.3.1, 5.3.2 (384).	
5.4. Принцип умеренно больших уклонений как распространение принципа инвариантности на область больших уклонений	386
5.5. Условные принципы умеренно больших уклонений для траекторий случайных блужданий	388
5.5.1. Условные п. у. б. у. в пространстве (C, ρ_C) (388). 5.5.2. Условные п. у. б. у. с концом траектории, локализованным в более узкой области (391). 5.5.3. Распространение утверждений теорем 5.5.1–5.5.4 на разрывные траектории, в том числе на траектории процессов с независимыми приращениями (396). 5.5.4. Аналоги теоремы Санова в зоне умеренно больших уклонений (397).	

ГЛАВА 6

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧАМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ	400
6.1. Проверка двух простых гипотез. Параметры наиболее мощных критериев	400
6.2. Последовательный анализ	405
6.2.1. Неограниченный объем выборки (405). 6.2.2. Усеченный последовательный анализ (ограниченный объем выборки) (410).	
6.3. Асимптотически оптимальные непараметрические критерии согласия	412
6.3.1. Асимптотически оптимальные критерии для класса «верхних» альтернатив (412). 6.3.2. «Нижние» альтернативы (418). 6.3.3. Двусторонние альтернативы (419).	
6.4. Дополнение. О проверке двух сложных параметрических гипотез	422
6.5. Дополнение. Задача о разладке	424
6.5.1. Оценка параметра θ по всей выборке, когда распределения F_j известны (424). 6.5.2. Последовательные процедуры (427). 6.5.3. Оценка параметра θ по всей выборке при неполных данных о распределениях F_j (428). 6.5.4. Последовательные процедуры при неполных данных о распределениях (432).	
СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ	435
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	439