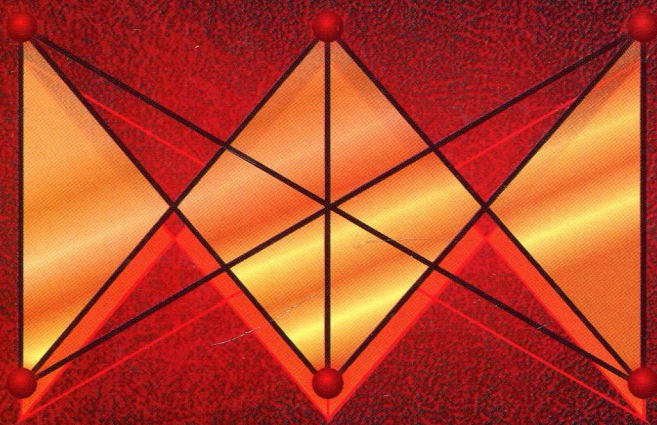


Ф. Харари

# ТЕОРИЯ ГРАФОВ



Frank Harary • GRAPH THEORY



URSS

Frank Harary  
GRAPH THEORY

**Ф. Харари**

# ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Перевод с английского  
и предисловие  
В. П. Козырева

Под редакцией  
Г. П. Гаврилова

Издание стереотипное



URSS  
МОСКВА

ББК 22.176 22.18

**Харари Фрэнк**

**Теория графов:** Пер. с англ. / Предисл. В. П. Козырева; Под ред. Г. П. Гаврилова. Изд. стереотип. — М.: УРСС: ЛЕНАНД, 2015. — 304 с.

В последнее время теория графов привлекает все более пристальное внимание специалистов различных областей знания. Наряду с традиционными применениями ее в таких науках, как физика, электротехника, химия, она проникла и в науки, считавшиеся раньше далекими от нее, — экономику, социологию, лингвистику и др. Давно известны тесные контакты теории графов с топологией, теорией групп и теорией вероятностей. Особенно важная взаимосвязь существует между теорией графов и теоретической кибернетикой (особенно теорией автоматов, исследованием операций, теорией кодирования, теорией игр). Широко используется теория графов при решении различных задач на вычислительных машинах.

Предлагаемая книга написана видным специалистом по дискретной математике. Несмотря на небольшой объем и конспективный характер изложения, книга, в свое время достаточно полно осветившая состояние теории графов, и в настоящий момент не утратила актуальности. Она, безусловно, будет полезна студентам университетов и технических вузов и, несомненно, заинтересует широкие круги научных работников, занимающихся приложениями дискретной математики.

ООО «ЛЕНАНД», 117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 11А, стр. 11.  
Формат 60×90/16. Печ. л. 19. Зак. № 5629

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография». Филиал «Чеховский печатный двор».  
142300, Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1.

ISBN 978-5-9710-1443-0  
(ЛЕНАНД)

ISBN 978-5-453-00080-7  
(УРСС)

© Frank Harary, 1969  
© УРСС, перевод  
на русский язык, 2014

15490 ID 190642



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельцев.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Я не люблю цитат. Скажи, что знаешь сам.  
*Р. Эмерсон<sup>1)</sup>*

Предисловие . . . . .	8
Введение . . . . .	9
Глава 1. <b>Открытие!</b> . . . . .	13
Задача о кёнигсбергских мостах . . . . .	13
Электрические цепи . . . . .	14
Химические изомеры . . . . .	15
«Вокруг света» . . . . .	16
Гипотеза четырех красок . . . . .	17
Теория графов в двадцатом веке . . . . .	18
Глава 2. <b>Графы</b> . . . . .	21
Типы графов . . . . .	21
Маршруты и связность . . . . .	26
Степени . . . . .	27
Задача Рамсея . . . . .	28
Экстремальные графы . . . . .	30
Графы пересечений . . . . .	33
Операции над графами . . . . .	35
Упражнения . . . . .	38
Глава 3. <b>Блоки</b> . . . . .	41
Точки сочленения, мосты и блоки . . . . .	41
Графы блоков и графы точек сочленения . . . . .	45
Упражнения . . . . .	46
Глава 4. <b>Деревья</b> . . . . .	48
Описание деревьев . . . . .	48
Центры и центроиды . . . . .	51
Деревья блоков и точек сочленения . . . . .	53
Независимые циклы и коциклы . . . . .	54
Матроиды . . . . .	57
Упражнения . . . . .	59
Глава 5. <b>Связность</b> . . . . .	60
Связность и реберная связность . . . . .	60
Графические варианты теоремы Менгера . . . . .	64

<sup>1)</sup> Р. Эмерсон (1803—1882) — американский писатель и философ. —  
*Прим. перев.*

Другие варианты теоремы Менгера . . . . .	70
Упражнения . . . . .	74
<b>Глава 6. Разбиения . . . . .</b>	<b>76</b>
Упражнения . . . . .	81
<b>Глава 7. Обходы графов . . . . .</b>	<b>83</b>
Эйлеровы графы . . . . .	83
Гамильтоновы графы . . . . .	85
Упражнения . . . . .	88
<b>Глава 8. Реберные графы . . . . .</b>	<b>91</b>
Некоторые свойства реберных графов . . . . .	91
Характеризация реберных графов . . . . .	94
Специальные реберные графы . . . . .	99
Реберные графы и обходы . . . . .	101
Тотальные графы . . . . .	103
Упражнения . . . . .	104
<b>Глава 9. Факторизация . . . . .</b>	<b>106</b>
1-факторизация . . . . .	106
2-факторизация . . . . .	111
Древесность . . . . .	113
Упражнения . . . . .	116
<b>Глава 10. Покрытия . . . . .</b>	<b>117</b>
Покрытия и независимость . . . . .	117
Критические вершины и ребра . . . . .	120
Реберное ядро . . . . .	122
Упражнения . . . . .	124
<b>Глава 11. Планарность . . . . .</b>	<b>126</b>
Плоские и планарные графы . . . . .	126
Внешнепланарные графы . . . . .	131
Теорема Понтрягина — Куратовского . . . . .	133
Другие характеристики планарных графов . . . . .	138
Род, толщина, крупность, число скрещиваний . . . . .	141
Упражнения . . . . .	148
<b>Глава 12. Раскраски . . . . .</b>	<b>151</b>
Хроматическое число . . . . .	152
Теорема о пяти красках . . . . .	155
Гипотеза четырех красок . . . . .	156
Теорема Хивуда о раскраске карт . . . . .	162
Однозначно раскрашиваемые графы . . . . .	164
Критические графы . . . . .	167
Гомоморфизмы . . . . .	169
Хроматический многочлен . . . . .	172
Упражнения . . . . .	175
<b>Глава 13. Матрицы . . . . .</b>	<b>178</b>
Матрица смежностей . . . . .	178
Матрица инциденций . . . . .	180

---

Матрица циклов . . . . .	183
Обзор дополнительных свойств матроидов . . . . .	186
Упражнения . . . . .	187
<b>Глава 14. Группы . . . . .</b>	<b>189</b>
Группа автоморфизмов графа . . . . .	193
Операции на группах подстановок . . . . .	194
Группа графа-композиции . . . . .	195
Графы с данной группой . . . . .	198
Симметрические графы . . . . .	201
Графы с более сильной симметрией . . . . .	204
Упражнения . . . . .	206
<b>Глава 15. Перечисления . . . . .</b>	<b>209</b>
Помеченные графы . . . . .	209
Теорема перечисления Пойа . . . . .	211
Перечисление графов . . . . .	216
Перечисление деревьев . . . . .	219
Теорема перечисления степенной группы . . . . .	224
Решенные и нерешенные задачи перечисления графов . . . . .	225
Упражнения . . . . .	230
<b>Глава 16. Орграфы . . . . .</b>	<b>232</b>
Орграфы и связность . . . . .	232
Ориентированная двойственность и бесконтурные орграфы . . . . .	234
Орграфы и матрицы . . . . .	237
Обзор по проблеме восстановления турниров . . . . .	244
Упражнения . . . . .	244
<b>Приложение I. Диаграммы графов . . . . .</b>	<b>248</b>
<b>Приложение II. Диаграммы орграфов. . . . .</b>	<b>260</b>
<b>Приложение III. Диаграммы деревьев . . . . .</b>	<b>266</b>
Список литературы и именной указатель . . . . .	268
Указатель обозначений . . . . .	291
Предметный указатель . . . . .	293