



# **НЕЛИНЕЙНАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ПРОЧНОСТИ**

**Цикл монографий в 5 томах**

*Под общей редакцией В.А. Левина*



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2015

**Том II**

**В.А. Левин, А.В. Вершинин**

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**

**ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ  
ВЫЧИСЛЕНИЯ НА ЭВМ**



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2015

УДК 519.6, 539.4

ББК 22.2

Л36

Левин В. А., Вершинин А. В. **Численные методы. Параллельные вычисления на ЭВМ.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. — 544 с. (**Нелинейная вычислительная механика прочности** / Под общ. ред. В. А. Левина: В 5 т. Т. II). — ISBN 978-5-9221-1632-9 (Т. II).

Пяти томный цикл монографий посвящен изложению моделей и методов для решения нелинейных задач механики деформируемого твердого тела с упором на задачи при больших деформациях и их наложении, а также разработке систем прочностного инженерного анализа (прочностных САЕ).

В томе II излагаются численные методы решения задач механики деформируемого твердого тела, используемые с развитием инженерного программного обеспечения в промышленных САЕ: метод конечных элементов, метод спектральных элементов, разрывный метод Галёркина. Описана параллельная реализация данных методов на современных высокопроизводительных системах с использованием технологий OpenMP/MPI/CUDA. В качестве примеров рассмотрены статические и динамические задачи теории наложения больших деформаций: рост дефекта с учетом зарождения и эволюции зон предразрушений, изменение массы тела, изменение свойств части материала тела при нагружении, нестационарные задачи о распространении нелинейно-упругих волн; отдельно — контактные задачи, интересные с практической точки зрения.

Для научных работников, разработчиков прочностных САЕ, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов, занимающихся механикой деформируемого твердого тела, теорией прочности, численными методами и параллельными вычислениями.

*Печатается по рекомендации Бюро отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления Российской академии наук.*

ISBN 978-5-9221-1632-9 (Т. II)

ISBN 978-5-9221-1578-0

© ФИЗМАТЛИТ, 2015

© В. А. Левин, А. В. Вершинин, 2015

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	6
Глава 1. <b>Основы метода конечных элементов</b> . . . . .	10
§ 1.1. Основная концепция. . . . .	10
§ 1.2. Разбиение области на элементы. Примеры различных подходов. Двумерный и трехмерный случаи . . . . .	13
§ 1.3. Построение неструктурированных адаптивных сеток . . . . .	20
1.3.1. Многоуровневое иерархическое измельчение/огрубление сетки . . . . .	28
1.3.2. Перестроение сеток на основе метрики . . . . .	29
§ 1.4. Нумерация узлов разбиения. . . . .	32
§ 1.5. Способы организации структур для хранения параметров элементов . . . . .	32
§ 1.6. Типы симплекс-элементов . . . . .	33
1.6.1. Одномерный симплекс-элемент . . . . .	34
1.6.2. Двумерный симплекс-элемент . . . . .	35
1.6.3. Трехмерный симплекс-элемент . . . . .	37
§ 1.7. Интерполяция векторных функций . . . . .	40
§ 1.8. Алгоритмы поиска элемента по координатам опорной точки . . . . .	42
1.8.1. Простой итеративный алгоритм . . . . .	42
1.8.2. Алгоритмы поиска с индексированием треугольников . . . . .	43
Итеративный алгоритм с индексированием треугольников (43). Итеративный алгоритм с индексированием центров треугольников <b>k-D-деревом</b> (44). Итеративный алгоритм с индексированием цент- ров треугольников квадродеревом (45).	
1.8.3. Алгоритмы с кэшированием поиска треугольников . . . . .	46
Итеративный алгоритм со статическим кэшированием поиска (46). Итеративный алгоритм с динамическим кэшированием поиска (47).	
Глава 2. <b>Применение МКЭ для задач теории упругости</b> . . . . .	49
§ 2.1. Методы невязок. . . . .	49
2.1.1. Метод Галёркина . . . . .	50
§ 2.2. Сведение уравнений теории упругости к уравнениям МКЭ . . . . .	52
§ 2.3. Формулировка МКЭ на основе принципа минимума потенциальной энергии . . . . .	58
§ 2.4. Локальная и глобальная матрицы жесткости . . . . .	62
§ 2.5. Граничные условия. . . . .	64
§ 2.6. Конечные деформации . . . . .	65
§ 2.7. Метод Ньютона. Модифицированный метод Ньютона . . . . .	67

§ 2.8. Сравнение результатов решений в линейных и нелинейных постановках . . . . .	69
§ 2.9. Нахождение результатов. Согласованные результаты элемента. Сглаживание напряжений . . . . .	73
§ 2.10. Несжимаемые материалы. Смешанная постановка. Решение на разнесенных сетках . . . . .	74
2.10.1. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений с матрицей седлового типа . . . . .	80
Модифицированный метод Якоби (81). Метод Узавы (83).	
§ 2.11. Смешанная постановка задач упругости. . . . .	84
§ 2.12. Вязкоупругие материалы. Интегралы свертки . . . . .	89
2.12.1. Общая теория линейной вязкоупругости. Одномерные модели	89
2.12.2. Общая теория линейной вязкоупругости. Многомерные модели	94
2.12.3. Нелинейная вязкоупругость . . . . .	97
Метод трапеций (97). Модифицированный метод трапеций (97). Метод замены ядра на его разложение в ряд Прони (98). Метод Паде (100). Метод Прони (101).	
§ 2.13. Динамические задачи. Схемы Ньюмарка . . . . .	104
§ 2.14. Неотражающие граничные условия . . . . .	107
§ 2.15. О решении контактных задач. . . . .	111
2.15.1. Контактное взаимодействие сектора цилиндра с оболочкой . . . . .	115
2.15.2. Алгоритм решения одной контактной задачи . . . . .	122
2.15.3. Результаты решения . . . . .	132
2.15.4. Проверка на численную сходимость . . . . .	132
§ 2.16. Плоская задача о взаимодействии линейно-упругого тела с идеальной жидкостью . . . . .	132
§ 2.17. О решении обратных задач теории упругости . . . . .	136
<b>Глава 3. Модификации МКЭ. Обзор современных методов. . . . .</b>	<b>139</b>
§ 3.1. Метод спектральных элементов . . . . .	139
3.1.1. Слабая формулировка . . . . .	140
3.1.2. Квадратуры Гаусса . . . . .	142
Квадратура Гаусса–Лежандра (142). Алгоритм вычисления узлов и весов (143). Погрешность интегрирования (143). Алгоритм на основе трехчленного рекуррентного отношения (143). Квадратура Гаусса–Лежандра–Лобатто (144).	
3.1.3. Метод спектральных элементов . . . . .	145
3.1.4. Проблемы при построении сеток . . . . .	155
3.1.5. Выбор численного метода. Сравнение метода конечных элементов и метода спектральных элементов . . . . .	162
3.1.6. Результаты и сравнение в задачах о распространении упругих волн . . . . .	164
3.1.7. Сравнение с одномерным аналитическим решением . . . . .	166

3.1.8. Аналитическое решение трехмерных изотропных однородных нестационарных задач теории упругости. Сравнение с численным решением . . . . .	166
3.1.9. Трехмерные задачи нестационарной теории упругости . . . . .	168
3.1.10. МСЭ для полностью неоднородных сред . . . . .	172
3.1.11. Трехмерный случай анизотропной вязкоупругой ТТИ-среды . . . . .	174
3.1.12. Моделирование акустического каротажа в анизотропной вязкоупругой среде трехмерным методом спектральных элементов . . . . . Введение (183). Построение сеток для численного моделирования задач акустического каротажа (186). Повышение порядка элементов сетки (192). Результаты расчетов. Сравнение с аналитическими решениями (194).	181
3.1.13. Методология тестирования программ для моделирования распространения волн в неоднородных средах . . . . . Разрывная модель (217). Расширенная разрывная модель (217). Сглаженная модель (217). Тестовые задачи для разрывной модели (221). Тестовые задачи для разрывной расширенной модели (221). Тестовые задачи для сглаженной модели (222). Вычисления для сети приемников (222). Результаты (222). Выводы (224).	212
3.1.14. Основные моменты оптимизации . . . . .	224
3.1.15. Раскраска сетки . . . . .	225
3.1.16. МСЭ с использованием OpenMP-MultiGPU . . . . .	227
3.1.17. МультиGPU в режиме SMP и сравнительный анализ . . . . .	230
3.1.18. Заключение . . . . .	231
§ 3.2. Разрывный метод Галёркина . . . . .	231
3.2.1. Введение . . . . .	231
3.2.2. Основные термины и обозначения . . . . .	233
3.2.3. Метод Галёркина . . . . .	233
3.2.4. Основные идеи разрывного метода Галёркина . . . . .	235
3.2.5. Двумерная задача: неструктурированная треугольная сетка . . . . .	241
3.2.6. Трехмерная задача: неструктурированная тетраэдральная сетка . . . . .	248
3.2.7. Трехмерная задача: уравнения акустики . . . . .	258
3.2.8. Уравнения с переменными коэффициентами . . . . .	259
3.2.9. Свойство тензоризации . . . . .	265
3.2.10. Тест на сходимость метода . . . . .	273
3.2.11. Об одном подходе к решению нелинейной задачи для двумерного упругого тела . . . . .	273
3.2.12. Метод штрафов . . . . .	277
§ 3.3. Выбор численного метода . . . . .	278
<b>Глава 4. Решение систем линейных уравнений . . . . .</b>	<b>280</b>
§ 4.1. Прямые методы . . . . .	284
4.1.1. Метод решения системы линейных уравнений на основе <i>LU</i> -разложения. Применение для случая разреженных матриц . . . . .	284

§ 4.2. Итерационные методы решения . . . . .	286
§ 4.3. Сравнение прямых и итерационных методов решения. . . . .	289
§ 4.4. Предобуславливание. . . . .	290
§ 4.5. Перенумерация . . . . .	292
§ 4.6. Способы хранения разреженных матриц . . . . .	294
<b>Глава 5. Реализация на ЭВМ. . . . .</b>	<b>298</b>
§ 5.1. Выполнение операций над разреженными матрицами. Оценка эффективности . . . . .	298
§ 5.2. Методы оптимизации расчетных программ. Анализ основных операций. Применение стандартных программных пакетов . . . . .	301
5.2.1. Расширение SSE . . . . .	301
5.2.2. Расширение SSE2 . . . . .	302
5.2.3. Расширение SSE3 . . . . .	302
5.2.4. Поддержка SIMD-расширений архитектурой x86-64 . . . . .	302
5.2.5. Библиотеки подпрограмм . . . . .	303
§ 5.3. Высокопроизводительные вычисления . . . . .	304
5.3.1. Современные суперкомпьютеры . . . . .	304
5.3.2. Векторно-конвейерные суперкомпьютеры . . . . .	306
5.3.3. Симметричные мультипроцессорные системы (SMP) . . . . .	307
5.3.4. Системы с массовым параллелизмом (MPP) . . . . .	309
5.3.5. Кластерные системы . . . . .	311
5.3.6. Вычисления на системах с общей памятью (технология OpenMP) . . . . .	313
5.3.7. Вычисления на суперкомпьютерах (технология MPI) . . . . .	314
5.3.8. Развитие графических процессоров . . . . .	314
5.3.9. Появление GPGPU . . . . .	318
5.3.10. API CUDA . . . . .	319
Обзор технологии CUDA (321). Несколько определений (322). Структура памяти на ГП (323). Программная структура CUDA (324).	
5.3.11. Решение задачи МКЭ на ГП . . . . .	327
5.3.12. Анализ производительности . . . . .	329
§ 5.4. Отображение результатов на примере представления полей напряжений. Использование линий уровня для визуализации . . . . .	332
<b>Глава 6. Применение МКЭ для задач теории многократного наложения больших деформаций . . . . .</b>	<b>334</b>
§ 6.1. Основные термины и обозначения теории многократного наложения больших деформаций . . . . .	334
§ 6.2. Адаптация сетки при наложении. Образование полостей, включений . . . . .	336



6.2.1. Простой алгоритм построения выпуклой оболочки . . . . .	338
6.2.2. Процедура Quickhull построения выпуклой оболочки . . . . .	339
6.2.3. Относительное положение точки и прямой . . . . .	339
6.2.4. Проверка принадлежности точки многоугольнику . . . . .	341
6.2.5. Площадь многоугольника . . . . .	342
§ 6.3. Физические свойства элементов и их изменение в процессе нагружения тела . . . . .	342
§ 6.4. Постановка одной задачи теории наложения больших деформаций и ее решение с помощью МКЭ. . . . .	343
§ 6.5. Общий алгоритм решения задач теории наложения больших деформаций с помощью МКЭ . . . . .	349
§ 6.6. Рост эллиптической полости с учетом возникновения и развития зон предразрушения . . . . .	350
§ 6.7. Постановка и методы решения динамических задач теории наложения больших деформаций . . . . .	356
§ 6.8. Задача Римана о распаде начального разрыва . . . . .	371
§ 6.9. О решении задач теории наложения конечных деформаций для тел из вязкоупругих материалов. . . . .	379
§ 6.10. Проверка численных методов решений . . . . .	385
<b>Глава 7. Примеры решенных задач. Результаты. . . . .</b>	<b>389</b>
§ 7.1. Двумерные задачи . . . . .	389
7.1.1. Задача об образовании кругового отверстия в нагруженном теле . . . . .	389
7.1.2. Задача о растяжении пластины с эллиптическим отверстием . . . . .	389
7.1.3. Одновременное образование эллиптического и кругового отверстий в нагруженном теле из материала Мурнагана . . . . .	391
7.1.4. Одновременное образование двух круговых отверстий . . . . .	391
7.1.5. Последовательное образование круговых отверстий . . . . .	392
7.1.6. Одновременное образование эллиптических отверстий . . . . .	395
7.1.7. Последовательное образование эллиптического и кругового отверстий в нагруженном теле . . . . .	402
7.1.8. Последовательное образование трещины и кругового включения в нагруженном теле . . . . .	406
7.1.9. Последовательное образование эллиптического включения и эллиптического отверстия в нагруженном теле для различных случаев взаимного расположения . . . . .	408
7.1.10. Задачи об образовании эллиптической полости в нагруженном теле с последующим образованием кругового отверстия . . . . .	414
7.1.11. Задачи об образовании эллиптической полости с последующим образованием круговых и эллиптических отверстий . . . . .	416
7.1.12. Задача об образовании полости в виде спирали в предварительно нагруженном теле . . . . .	420
7.1.13. Задача об образовании полости в виде двутавровой балки в предварительно нагруженном теле . . . . .	420

7.1.14. Задача о последовательном образовании двух круговых отверстий, форма которых задана в конечном состоянии . . . . .	420
7.1.15. Задача о динамическом образовании двух круговых отверстий и возникновении включений в нагруженном теле . . . . .	422
7.1.16. Модельная плоская задача о росте эллиптической трещины . . . . .	425
7.1.17. Последовательное образование зон откола . . . . .	425
7.1.18. Задача Ламе–Гадолина . . . . .	425
7.1.19. Задача о вставке предварительно деформированной эллиптической трубы в недеформированную . . . . .	441
§ 7.2. Трехмерные задачи . . . . .	444
7.2.1. Задача об образовании эллипсоидальной полости в нагруженном теле . . . . .	444
7.2.2. Задача об одновременном образовании эллипсоидальной и шаровой полостей . . . . .	445
7.2.3. Задача об одновременном образовании упругого эллипсоидального включения и шаровой поры . . . . .	450
7.2.4. Задача о последовательном образовании эллипсоидальной полости и упругих шаровых включений в нагруженном теле . . . . .	451
7.2.5. Одновременное образование эллипсоидальных включений . . . . .	451
7.2.6. Последовательное образование эллипсоидальных включений . . . . .	454
7.2.7. Одновременное образование эллипсоидальных включений с оболочками . . . . .	457
7.2.8. Одновременное образование упругих шаровых слоистых включений . . . . .	466
7.2.9. Последовательное образование упругих шаровых слоистых включений . . . . .	468
7.2.10. Одновременное образование упругих эллипсоидальных слоистых включений . . . . .	471
7.2.11. Задача об образовании зоны предразрушения вблизи эллипсоидальной полости . . . . .	473
7.2.12. Образование упругого шарового включения с последующей разгрузкой . . . . .	476
7.2.13. Образование упругого эллипсоидального включения в нагруженном теле с последующей разгрузкой . . . . .	480
7.2.14. Образование упругого цилиндрического включения в нагруженном теле с последующей разгрузкой . . . . .	482
Список литературы . . . . .	486