

НЕЛИНЕЙНАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ПРОЧНОСТИ

Цикл монографий в 5 томах

Под общей редакцией В.А. Левина



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2016

Том III

В.А. Левин, К.М. Зингерман

**ТОЧНЫЕ
И ПРИБЛИЖЕННЫЕ
АНАЛИТИЧЕСКИЕ
РЕШЕНИЯ
ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ
И ИХ НАЛОЖЕНИИ**



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2016

УДК 539.3, 517.957.6, 517.958, 517.6

ББК 22.2

Л 36

Левин В.А., Зингерман К.М. **Точные и приближенные аналитические решения при конечных деформациях и их наложении.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. — 400 с. (**Нелинейная вычислительная механика прочности** / Под общ. ред. В.А. Левина: В 5 т. Т. III). — ISBN 978-5-9221-1660-2 (Т. III).

Пятитомный цикл монографий посвящен изложению моделей и методов для решения нелинейных задач механики деформируемого твердого тела с упором на задачи при больших деформациях и их наложении, а также разработке систем прочностного инженерного анализа (прочностных САЕ).

В томе III приведены точные и приближенные аналитические и численно-аналитические решения задач теории многократного наложения больших деформаций. Это задачи о телах, получаемых последовательным соединением (наращиванием) или удалением их предварительно напряженных в процессе нагружения частей, и о телах, в которых при нагружении возникают области с другими свойствами, т.е. задачи, в которых при нагружении изменяются границы и граничные условия. Отмечается, что результаты их решения являются тестовыми при разработке наукоемких модулей САЕ для моделирования при применении аддитивных технологий; моделирования твердотельных фазовых переходов, возникновения и развития дефектов с учетом эволюции зон предразрушения. Рассмотрены при больших деформациях точные решения обобщенной задачи Ламе–Гадолина, задачи об изгибе составного бруса, о кручении составного стержня с предварительно деформированными частями. Приведены приближенные решения при конечных деформациях плоских задач о последовательном образовании полостей и включений в нагруженном теле из упругого или вязкоупругого материала; при этом исследуются границы применения используемых методов и алгоритмов. Изложены полученные авторами точные решения задач теории упругости при больших деформациях, повышающие качество тестирования САЕ. Описывается методика определения эффективных свойств пористых материалов при конечных деформациях и их перераспределении.

Для научных работников, разработчиков и пользователей прочностных САЕ, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов, занимающихся механикой деформируемого твердого тела, теорией прочности, численными методами.

Печатается по рекомендации Бюро отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления Российской академии наук.

ISBN 978-5-9221-1660-2 (Т. III)

ISBN 978-5-9221-1578-0

© ФИЗМАТЛИТ, 2016

© В. А. Левин, К. М. Зингерман, 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Основные термины и обозначения.	11
Глава 1. Точные решения осесимметричных и плоских задач	13
§ 1.1. Основные термины и обозначения этой главы.	13
§ 1.2. Задачи об осесимметричной плоской деформации тел из нелинейно-упругих несжимаемых материалов	14
1.2.1. Постановка задачи в координатах конечного состояния и общий подход к решению	15
1.2.2. Решение задач для материала Бартенева–Хазановича (Варги) Деформация полого цилиндра, размеры которого заданы в конечном состоянии (18). Деформация полого цилиндра, размеры которого заданы в начальном состоянии (19). Деформация бесконечно протяженного тела с отверстием (21).	17
1.2.3. Решение задач для материала Трелоара	22
Деформация полого цилиндра, размеры которого заданы в конечном состоянии (22). Деформация полого цилиндра, размеры которого заданы в начальном состоянии (23). Деформация бесконечно протяженного тела с отверстием (25).	
1.2.4. Обсуждение результатов решения задач и качественных эффектов	26
§ 1.3. Задача об осесимметричной деформации пластины из материала Бартенева–Хазановича	26
1.3.1. Математическая постановка задачи	27
1.3.2. Общий подход к решению задачи	28
1.3.3. Решение для кругового кольца, размеры которого заданы в конечном состоянии	29
Случай следящего нагружения (29). Случай мертвого нагружения (30).	
1.3.4. Решение для кругового кольца, размеры которого заданы в начальном состоянии	31
Случай следящего нагружения (31). Случай мертвого нагружения (33).	
1.3.5. Анализ возможной причины неоднозначности решения	33

1.3.6. Решение задачи для бесконечной пластины с круговым отверстием, имеющимся изначально или возникающим после нагружения	35
§ 1.4. Задача о вставке предварительно деформированного цилиндра в недеформированный	37
1.4.1. Общая механическая постановка задачи	37
1.4.2. Математическая постановка задачи	38
1.4.3. Нахождение решения	40
1.4.4. Результаты численных расчетов	42
§ 1.5. Осесимметричная плоская деформация тел из материала Блейтца–Ко	47
1.5.1. Математическая постановка задачи	47
1.5.2. Нахождение решения задачи	47
1.5.3. Результаты численных расчетов	52
§ 1.6. Кручение составного цилиндра с предварительно деформированным включением	55
1.6.1. Основные обозначения	56
1.6.2. Начальная деформация внутреннего цилиндра	57
1.6.3. Деформации и напряжения в составном цилиндре	58
1.6.4. Результаты численных расчетов	63
§ 1.7. Изгиб составного бруса с предварительно деформированными слоями	65
1.7.1. Основные уравнения постановки задачи	66
1.7.2. Нахождение решения задачи	67
1.7.3. Результаты численных расчетов	70
§ 1.8. Обзор некоторых точных решений задач нелинейной упругости при больших деформациях	72
Глава 2. Методы и алгоритмы приближенного аналитического решения задач о наложении конечных упругих деформаций	76
§ 2.1. Использование метода Синьорини для задач о перераспределении конечных деформаций при изменении границ и граничных условий	79
2.1.1. Метод возмущений. Общий подход	81
2.1.2. Запись уравнений в приближениях для задач о перераспределении конечных деформаций	82
2.1.3. Нахождение фиктивных массовых и поверхностных сил для первого приближения	90
2.1.4. Запись постановки линеаризованных задач в приближениях в общей форме	96
2.1.5. Запись определяющих соотношений в приближениях для гиперупругих сжимаемых материалов	100
Общий подход (100). Запись в приближениях для материала Блейтца–Ко (102).	
§ 2.2. Метод Ньютона–Канторовича и его применение к решению задач нелинейной упругости и теории наложения конечных деформаций	104
2.2.1. Общий подход к решению функциональных уравнений методом Ньютона–Канторовича	105

2.2.2. Решение задач нелинейной упругости методом Ньютона–Канторовича	107
2.2.3. Применение метода Ньютона–Канторовича к задачам теории наложения конечных деформаций	114
Варианты постановки задачи (115). Преобразование уравнений и граничных условий (118). Постановка линеаризованных задач (121). Результаты расчета напряженного состояния тела при образовании кругового отверстия (125).	
§ 2.3. Общий алгоритм решения задач о последовательном образовании отверстий	127
§ 2.4. О построении конформно отображающих функций для деформированного контура.	129
Глава 3. Решение плоских задач теории наложения конечных деформаций с использованием линеаризации	133
§ 3.1. Представление уравнений и граничных условий в комплексной форме	134
3.1.1. Вывод формул комплексного представления для сжимаемых материалов	135
Случай плоской деформации (137). Случай плоского напряженного состояния (141).	
3.1.2. Вывод формул комплексного представления для несжимаемых материалов	143
Случай плоской деформации (144). Случай плоского напряженного состояния (145).	
§ 3.2. Решение задачи с использованием функций комплексных переменных	146
3.2.1. Решение для плоской деформации	148
Случай сжимаемого материала (148). Случай несжимаемого материала (149).	
3.2.2. Решение для плоского напряженного состояния	151
Случай сжимаемого материала (151). Случай несжимаемого материала (152).	
§ 3.3. Использование потенциалов Колосова–Мухелишвили в задачах о напряженном состоянии тела с отверстием заданной формы	154
§ 3.4. Сравнение результатов решения различными методами задач о напряженно-деформированном состоянии тел при образовании отверстия.	160
3.4.1. Круговое отверстие. Всестороннее нагружение	161
3.4.2. Круговое отверстие. Одноосное нагружение	167
3.4.3. Круговое отверстие. Одноосное растяжение	172
3.4.4. Круговое отверстие. Сдвиговое нагружение	173
3.4.5. Эллиптическое отверстие	175
3.4.6. Треугольное отверстие	176
§ 3.5. Нахождение комплексных потенциалов для задач о напряженно-деформированном состоянии тела с жестким круговым включением	177

§ 3.6. Нахождение комплексных потенциалов для задач о напряженно-деформированном состоянии тела с упругим круговым включением	181
3.6.1. Вывод формул для нахождения комплексных потенциалов . . .	182
3.6.2. Результаты расчетов для задач о напряженно-деформированном состоянии вблизи включения, образованного в нагруженном теле	190
Сравнение приближенного аналитического и конечноэлементного решений (190). Сравнение приближенных аналитических решений, полученных методами Синьорини и Ньютона-Канторовича (191).	
§ 3.7. Взаимовлияние отверстий и включений. Метод Шварца	194
3.7.1. Применение метода Шварца к решению задачи Дирихле для уравнения Лапласа	194
3.7.2. Применение метода Шварца к решению линейаризованных плоских задач теории упругости	197
Общий подход (197). Нахождение решения с использованием комплексных потенциалов (199).	
3.7.3. Анализ результатов решения задач с использованием метода Шварца	201
Распределение напряжений в теле с двумя одинаковыми одновременно образованными отверстиями (201). Задача о распределении напряжений в теле с двумя близкорасположенными отверстиями, одно из которых по размеру во много раз больше другого (204). Задача о распределении напряжений в теле с двумя одинаковыми одновременно образованными упругими включениями (207).	
 Глава 4. О решении плоских задач теории наложения конечных деформаций в телах из вязкоупругих материалов	
§ 4.1. Постановка задачи о последовательном образовании отверстий . . .	212
4.1.1. Механическая постановка задачи	212
4.1.2. Математическая постановка задачи	214
§ 4.2. Запись постановки задачи в приближениях	216
§ 4.3. Решение задачи для нулевого приближения	220
§ 4.4. Нахождение приближений более высокого порядка на примере первого приближения	228
§ 4.5. Алгоритм нахождения временных коэффициентов	237
§ 4.6. Аппроксимация ядер релаксации и их резольвент	238
4.6.1. Методы аппроксимации	238
4.6.2. Тестовые расчеты и инженерный анализ точности нахождения резольвенты	240
 Глава 5. Анализ результатов решения задач о многократном наложении больших деформаций	
§ 5.1. Задачи о распределении напряжений вблизи отверстий, образованных в нагруженных упругих телах	246

5.1.1. Напряженное состояние тела, в котором образуется одно отверстие	246
5.1.2. Взаимовлияние отверстий, образованных последовательно или одновременно в нагруженном теле	252
§ 5.2. Напряженное состояние вблизи упругих включений, образованных в нагруженном теле	255
5.2.1. Общая постановка задачи о напряженном состоянии при образовании включения	256
5.2.2. Математическая постановка задачи	258
5.2.3. Результаты решения задач о напряженном состоянии тела при образовании одного включения	261
5.2.4. Взаимовлияние включений	268
§ 5.3. Задачи вязкоупругости	270
5.3.1. Задачи о напряженном состоянии вязкоупругого тела при образовании в нем одного отверстия	271
5.3.2. Взаимовлияние двух последовательно образующихся отверстий	275
5.3.3. Жесткие включения и их взаимовлияние	279
Глава 6. Осесимметричные задачи	285
§ 6.1. Постановка задачи в перемещениях	285
§ 6.2. Задача о вертикальной скважине (изотропный упругий материал)	289
§ 6.3. Массив из вязкоупругого изотропного материала	294
§ 6.4. Задача о вертикальной скважине в массиве из трансверсально-изотропного упругого материала	300
Глава 7. Эффективные свойства пористых материалов при конечных деформациях и их перераспределении.	304
§ 7.1. Осреднение по представительной области	305
7.1.1. Общий подход к построению эффективных определяющих соотношений	305
7.1.2. Вычисление эффективных модулей упругости на основе решений краевых задач	312
Вычисление эффективных модулей на основе решений задач методом Синьорини (313). Вычисление эффективных модулей на основе численных решений краевых задач (314).	
§ 7.2. Осреднение по ансамблю.	317
§ 7.3. Анализ результатов расчетов	322
§ 7.4. Эффективные свойства при перераспределении конечных деформаций	325
Приложение.	331
§ П.1. Основы теории наложения больших упругих и вязкоупругих деформаций	331

П.1.1. Кинематика деформаций	331
Описание движения сплошной среды при многократном наложении больших деформаций (331). Аффиноры деформаций (333). Меры деформаций и тензоры деформаций (334). Изменение элементарного объема и элементарной площадки при движении сплошной среды (336).	
П.1.2. Определяющие соотношения	337
П.1.3. Уравнения равновесия и граничные условия	340
П.1.4. О постановке краевых задач теории наложения больших упругих и вязкоупругих деформаций	341
Общая механическая постановка задачи (341). Математическая постановка задачи в координатах промежуточного состояния (343). Математическая постановка задачи в координатах конечного состояния (345). Особенности математической постановки задач о распределении напряжений вблизи отверстий, образованных в нагруженном теле (346).	
П.1.5. Плоская деформация и плоское напряженное состояние . . .	347
§ П.2. Алгоритмы аналитических вычислений, реализованные в программном комплексе «Наложение»	349
П.2.1. Алгоритмы для выполнения аналитических операций над изображениями по Лапласу	351
П.2.2. Алгоритмы для выполнения аналитических операций над функциями комплексных переменных	354
Список литературы	365