

Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный технический университет – УПИ
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

Радиотехнический институт - РТФ

Кафедра вычислительных методов и уравнений
математической физики

Серия «Современная математика в инженерном образовании»

А.Г. ЧЕНЦОВ

ЭЛЕМЕНТЫ КОНЕЧНО-АДДИТИВНОЙ ТЕОРИИ МЕРЫ, II

Екатеринбург
УГТУ-УПИ
2010

УДК 517.981.7(075.8)
ББК 22.12я73
Ч 43

Рецензенты:

академик РАН А.В. Кряжимский,
кафедра прикладной математики УрГУ (заведующий кафедрой, кандидат физ.-мат. наук,
доцент М.И. Логинов)

Ченцов А.Г.

Ч 43 Элементы конечно-аддитивной теории меры, II: монография / А.Г.Ченцов.
Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2010. 542 с.

ISBN 978-5-321-01684-8

Монография посвящена исследованию вопросов структуры пространства конечно-аддитивных мер ограниченной вариации. Рассматриваются условия, гарантирующие счетную аддитивность конечно-аддитивной меры и реализуемые в терминах σ -топологии А.Д. Александрова. Исследуются отображения измеримых структур, сохраняющие операцию пересечения и конечные измеримые разбиения «единицы». В терминах таких отображений конструируется «конечно-аддитивный» аналог формулы замены переменной под знаком интеграла; рассматриваются некоторые представления меры Бореля-Лебега на конечном замкнутом промежутке вещественной прямой.

Исследуются вопросы структуры чисто конечно-аддитивных и счетно-аддитивных $(0, 1)$ -мер, а также представления их интегральных функционалов в виде операций предельного перехода по ультрафильтрам, порождающим упомянутые меры. Приведены конструкции, реализующие при определенных условиях недираковские счетно-аддитивные $(0, 1)$ -меры. Исследуются свойства пространств ограниченных измеримых функций в случаях, когда упомянутые (недираковские) меры существуют.

Монография является второй частью исследования автора, посвященного вопросам конечно-аддитивной теории меры. Она существенно развивает и дополняет материал первой части, ориентирована на научных сотрудников, преподавателей, аспирантов и студентов магистратуры технических и классических университетов. Излагаемые в книге конструкции практически не отражены в литературе на русском языке и, вместе с тем, существенно отличаются от аналогов в англоязычных изданиях по теории меры. Они могут использоваться в задачах асимптотического анализа, теории управления, теории вероятностей, теории игр. В частности, эти конструкции применяются при построении расширений линейных задач управления с импульсными ограничениями и разрывностью в коэффициентах при управляющих воздействиях.

УДК 510.22(075.8)
ББК 22.12я73

ISBN 978-5-321-01684-8

© УГТУ-УПИ, 2010
© Ченцов А.Г., 2010

Оглавление

Введение	7
Глава 6. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА БОРЕЛЕВСКИХ МНОЖЕСТВ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПРЯМОЙ	13
§ 6.1. Некоторые общие свойства	13
§ 6.2. Борелевские подмножества вещественной прямой	21
§ 6.3. Измеримые структуры конечных замкнутых промежутков вещественной прямой	23
§ 6.4. Подпространства измеримых пространств	31
§ 6.5. Монотонные функции и функции ограниченной вариации	38
Глава 7. КОМПАКТНОСТЬ В σ -ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ И ПРОБЛЕМЫ СЧЕТНОЙ АДДИТИВНОСТИ МЕРЫ: ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ИЗМЕРИМЫХ ПРОСТРАНСТВ	54
§ 7.1. Обсуждение используемых конструкций	54
§ 7.2. Определение и простейшие свойства σ -топологических пространств	57
§ 7.3. Подпространства σ -топологических пространств	61
§ 7.4. Структура σ -топологий, порожденных семействами множеств	64
§ 7.5. Связь со свойством счетной компактности	78
§ 7.6. Счетная компактность и проблема счетной аддитивности конечно-адди- тивной меры	97
§ 7.7. Преобразование измеримых пространств, 1	107
§ 7.8. Преобразование измеримых пространств, 2	128
§ 7.9. Измеримые отображения; замена переменной под знаком интеграла	148
§ 7.10. Счетно-аддитивное расширение конечно-аддитивной меры (пример) ..	154
§ 7.11. Добавление: одно полезное представление множества расщепляющих гомоморфизмов	163
Глава 8. РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ (МЕРА ЛЕБЕГА НА ОТРЕЗКЕ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПРЯМОЙ).....	167
§ 8.1. Мера Бореля-Лебега: содержательное обсуждение основных конструк- ций	167
§ 8.2. Пространство-стрелка и подалгебра промежутков отрезка веществен- ной прямой	168
§ 8.3. Некоторые свойства операции преобразования пространства-стрелки ...	180

§ 8.4. Счетная аддитивность функции длины	186
§ 8.5. Мера Лебега на замкнутом промежутке вещественной прямой; равномерное распределение	193
§ 8.6. Добавление: интеграл Лебега ограниченной измеримой функции (абстрактная версия); представление в виде ярусного интеграла	196
§ 8.7. Интегрирование по фиксированной мере на стандартном измеримом пространстве	201
Глава 9. ПОРЯДКОВЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА	
 КОНЕЧНО-АДДИТИВНЫХ МЕР ОГРАНИЧЕННОЙ	
 ВАРИАЦИИ	
§ 9.1. Векторная решетка конечно-аддитивных мер ограниченной вариации (обсуждение основных положений)	210
§ 9.2. Простейшие порядковые свойства	213
§ 9.3. Порядковые свойства конуса неотрицательных конечно-аддитивных мер, 1	233
§ 9.4. Порядковые свойства конуса неотрицательных конечно-аддитивных мер, 2	245
§ 9.5. Пространство конечно-аддитивных мер ограниченной вариации как полная векторная решетка	254
§ 9.6. Разложение Хьюитта-Иосиды: подготовительные конструкции	268
§ 9.7. Разложение Хьюитта-Иосиды в конусе неотрицательных конечно-аддитивных мер	278
§ 9.8. Некоторые свойства, связанные с разложением Хьюитта-Иосиды в конусе неотрицательных конечно-аддитивных мер	287
§ 9.9. Некоторые замечания относительно многозначной версии разложения Хьюитта-Иосиды	301
§ 9.10. Некоторые замечания относительно «знакопеременной» версии разложения Хьюитта-Иосиды	305
Глава 10. КОНЕЧНО-АДДИТИВНЫЕ И СЧЕТНО-АДДИТИВНЫЕ	
 (0,1)-МЕРЫ	
§ 10.1. Конечно-аддитивные (0,1)-меры и ультрафильтры: обсуждение конструкций	316
§ 10.2. Конечно-аддитивные (0,1)-меры: простейшие свойства	318
§ 10.3. Квазифильтры, фильтры и ультрафильтры измеримых пространств ..	327
§ 10.4. Ультрафильтры и двузначные меры, 1	331
§ 10.5. Ультрафильтры и двузначные меры, 2	338
§ 10.6. Некоторые добавления	351

§ 10.7. Счетная аддитивность и её связь с ультрафильтрами	361
§ 10.8. Предел по ультрафильтру и его интегральное представление	367
§ 10.9. Недираковские счетно-аддитивные $(0,1)$ -меры	377
§ 10.10. Недираковские конечно-аддитивные $(0,1)$ -меры и σ -топологические пространства	390
§ 10.11. Недираковские счетно-аддитивные $(0,1)$ -меры в σ -топологических пространствах, 1	409
§ 10.12. Недираковские счетно-аддитивные $(0,1)$ -меры в σ -топологических пространствах, 2	414
§ 10.13. Свойство компактности и недираковские счетно-аддитивные $(0,1)$ -меры	429
§ 10.14. Некоторые добавления	449
ПРИЛОЖЕНИЕ	463
1. Топологические пространства (общие сведения)	463
2. Подпространства топологического пространства	464
3. Топология, порожденная множеством отображений	470
4. Тихоновская степень топологического пространства	473
5. Фильтры и ультрафильтры, 1	475
6. Конструкции, связанные с леммой Цорна, 1	480
7. Конструкции, связанные с леммой Цорна, 2	497
8. Фильтры и ультрафильтры, 2	504
9. Ультрафильтры и свойство компактности топологического пространства ..	515
10. Теорема Тихонова (частный случай)	520
11. Тихоновское произведение конечных дискретных пространств	526
Литература	534
Предметный указатель	537
Список основных сокращений	541