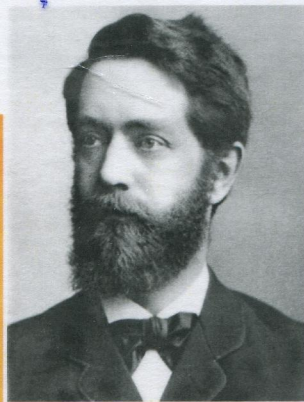


Физико •  
Математическое  
Наследие

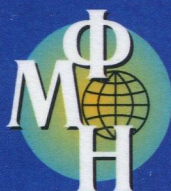
**Ф. КЛЕЙН**

Выдающийся  
немецкий математик  
Член-корреспондент  
Прусской академии наук  
в Берлине



**НЕЕВКЛИДОВА  
ГЕОМЕТРИЯ**

Felix KLEIN • VORLESUNGEN ÜBER NICHT-EUKLIDISCHE GEOMETRIE



Математика  
Геометрия



*Физико-математическое наследие: математика (геометрия)*

---

Felix Klein  
VORLESUNGEN  
ÜBER NICHT-EUKLIDISCHE GEOMETRIE

**Ф. Клейн**

**НЕЕВКЛИДОВА  
ГЕОМЕТРИЯ**

Перевод с немецкого  
Н. К. Брушлинского

Издание четвертое,  
исправленное



**URSS**  
**МОСКВА**

ББК 22.151я44 22.152

**Клейн Феликс**

**Неевклидова геометрия:** Пер. с нем. Изд. 4-е, испр. — М.: ЛЕНАНД, 2017. — 352 с. (Физико-математическое наследие: математика (геометрия).)

Вниманию читателя предлагается книга известного немецкого математика Ф. Клейна (1849–1925). В первой части подробно изложены основы проективной геометрии и теория проективных преобразований, необходимые для понимания дальнейших разделов книги. Далее показано, каким образом в проективную геометрию могут быть внесены понятия евклидовой геометрии; описываются соотношения, связывающие эллиптическую и гиперболическую геометрии с евклидовой геометрией; изучаются свойства неевклидовых геометрий. В третьей части описаны история и применения неевклидовой геометрии, ее отношение к другим областям математики.

Рекомендуется студентам университетов — будущим математикам, а также аспирантам и специалистам.

Формат 60×90/16. Печ. л. 22. Зак. № АЛ-522.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».

117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-9710-4251-8

© ЛЕНАНД, 2016

9158 ID 223789



9 785971 042518



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

# Содержание

## Часть I

<b>Введение в проективную геометрию</b> . . . . .	11
<b>Глава 1. Основы проективной геометрии</b> . . . . .	12
§ 1. Аффинные, однородные и проективные координаты . . . . .	12
1.1. Аффинные координаты . . . . .	12
1.2. Однородные координаты . . . . .	13
1.3. Проективные координаты . . . . .	16
1.4. Связь между аффинными и проективными координатами . . . . .	20
1.5. Обзор развития геометрии . . . . .	20
§ 2. Соотношения связности проективных образов; односторонность проективной плоскости . . . . .	23
§ 3. Линейные однородные подстановки . . . . .	27
3.1. Линейные однородные подстановки; понятие группы . . . . .	27
3.2. Когрессиентность и контрагессиентность . . . . .	30
§ 4. Проективные преобразования . . . . .	32
4.1. Проективные, свободно-аффинные и центрально-аффинные преобразования . . . . .	32
4.2. Знак определителя подстановки . . . . .	34
4.3. Наглядное изображение проективных преобразований . . . . .	36
4.4. Неподвижные точки проективного преобразования . . . . .	39
§ 5. $n$ -мерные многообразия . . . . .	42
§ 6. Проективные координаты прямой и проективные координаты плоскости; принцип двойственности . . . . .	45
6.1. Проективные координаты прямой на плоскости . . . . .	45
6.2. Проективные координаты плоскости . . . . .	47
6.3. Двойственность на плоскости . . . . .	48
6.4. Двойственность в пространстве . . . . .	50
6.5. Двойственное в себе построение проективной геометрии . . . . .	51
§ 7. Двойные отношения . . . . .	52
7.1. Элементарные свойства . . . . .	52

7.2.	Двойное отношение четырех точек на прямой . . . . .	53
7.3.	Двойное отношение в пучке прямых и плоскостей . . . . .	55
7.4.	Определение проективных координат с помощью двойных отношений . . . . .	57
§ 8.	Мнимые элементы . . . . .	57
8.1.	Введение мнимых точек . . . . .	58
8.2.	Мнимые элементы на плоскости . . . . .	59
8.3.	Мнимые элементы в пространстве . . . . .	60
8.4.	Наглядное изображение мнимых точек прямой линии на числовой плоскости и на числовой сфере . . . . .	61
8.5.	Антиколлинеации . . . . .	63
8.6.	Исторические замечания . . . . .	64
<b>Глава 2.</b>	<b>Образы второй степени . . . . .</b>	<b>65</b>
§ 1.	Полярные преобразования относительно образов второго порядка и класса . . . . .	65
1.1.	Определение образов второго порядка и класса . . . . .	65
1.2.	Полярное преобразование относительно данного образа второго порядка . . . . .	66
1.3.	Полярные преобразования относительно образов второго класса . . . . .	68
1.4.	Основные теоремы о полярных преобразованиях . . . . .	70
§ 2.	Соответствие между невырождающимися образами второго порядка и второго класса . . . . .	72
§ 3.	Классификация образов второго порядка . . . . .	75
3.1.	Классификация поверхностей второго порядка по рангам их определителей . . . . .	75
3.2.	Отнесение поверхности второго порядка к полярному тетраэдру . . . . .	77
3.3.	Дальнейшая классификация действительных поверхностей второго порядка . . . . .	80
3.4.	Соответствующая классификация кривых и систем точек второго порядка . . . . .	84
3.5.	Исторические замечания о классификации образов второго порядка . . . . .	85
§ 4.	Классификация образов второго класса; связь с классификацией образов второго порядка . . . . .	85
4.1.	Классификация поверхностей второго класса . . . . .	85
4.2.	Соотношения между различными типами поверхностей второго порядка и класса . . . . .	87
4.3.	Соответствующие исследования для случая плоскости . . . . .	89
§ 5.	Прямые линии на невырождающихся поверхностях второго порядка . . . . .	90

---

§ 6. Превращения образов второй степени при непрерывном изменении коэффициентов; классификация этих образов . . . . .	95
6.1. Превращения на прямой линии . . . . .	96
6.2. Превращения на плоскости . . . . .	96
6.3. Соединение понятий кривых второго порядка и класса в понятие кривой второй степени . . . . .	100
6.4. Превращения в пространстве . . . . .	103
6.5. Объединение понятий поверхности второго порядка и класса в понятие поверхности второй степени . . . . .	107
<b>Глава 3. Проективные преобразования, переводящие образ второй степени самого в себя . . . . .</b>	<b>109</b>
§ 1. Одномерный случай . . . . .	109
1.1. Комплексные проективные преобразования, переводящие невырождающийся образ самого в себя . . . . .	109
1.2. Действительные проективные преобразования . . . . .	111
1.3. Проективные преобразования, переводящие дважды взятую точку самое в себя . . . . .	112
1.4. Непрерывное превращение различных случаев друг в друга . . . . .	113
§ 2. Двумерный случай . . . . .	114
2.1. Комплексные проективные преобразования, переводящие невырождающийся образ сам в себя . . . . .	114
2.2. Действительные проективные преобразования . . . . .	117
2.3. Инвариантные элементы . . . . .	120
2.4. Проективные преобразования как вращения . . . . .	123
2.5. Проективные преобразования, переводящие данный вырождающийся образ в себя . . . . .	125
2.6. Превращение различных случаев друг в друга . . . . .	127
§ 3. Трехмерный случай . . . . .	128
3.1. Комплексные проективные преобразования, переводящие невырождающийся образ сам в себя; сдвиги . . . . .	128
3.2. Действительные проективные преобразования . . . . .	133
3.3. Инвариантные элементы . . . . .	135
3.4. Вращения и винтообразные движения . . . . .	138
3.5. Проективные преобразования, оставляющие инвариантным вырождающийся образ . . . . .	142
3.6. Превращение различных случаев друг в друга . . . . .	143

**Часть II**

<b>Проективное мероопределение</b> .....	<b>147</b>
<b>Глава 4. Внесение евклидовой метрики в проективную систему</b> .....	<b>148</b>
§ 1. Основные метрические формулы евклидовой геометрии ...	148
1.1. Формулы расстояния .....	148
1.2. Формулы угла .....	149
§ 2. Исследование метрических формул; круговые точки и шаровой круг .....	151
2.1. Рассмотрение формул расстояния .....	151
2.2. Исследование формул углов .....	153
2.3. Круговые точки и шаровой круг .....	156
§ 3. Евклидова метрика как проективное отношение к фундаментальным образам .....	157
3.1. Выражение евклидового угла с помощью двойного отношения .....	157
3.2. Соответствующее преобразование формулы евклидового расстояния .....	159
§ 4. Замена круговых точек и шарового круга действительными образами .....	161
§ 5. Метрика в связке прямых и в связке плоскостей; сферическая и эллиптическая геометрии .....	165
5.1. Метрика в связке .....	165
5.2. Связь с геометрией на сфере .....	166
5.3. Эллиптическая геометрия .....	168
5.4. Связь между эллиптической и сферической геометрия .....	171
<b>Глава 5. Введение проективных координат,     независимое от евклидовой геометрии</b> .....	<b>174</b>
§ 1. Построение четвертых гармонических элементов .....	175
§ 2. Введение координат в одномерной области .....	178
§ 3. Введение координат на плоскости и в пространстве .....	182
<b>Глава 6. Проективные мероопределения</b> .....	<b>184</b>
§ 1. Невырождающиеся мероопределения .....	184
1.1. Определение расстояний и углов с помощью двойных отношений .....	185
1.2. Аналитические выражения расстояний и углов .....	187
1.3. Эллиптическое и гиперболическое мероопределения на прямой линии .....	191
1.4. Эллиптическое и гиперболическое мероопределения в пучке прямых и плоскостей .....	194
1.5. Эллиптическое и гиперболическое мероопределения на плоскости .....	194



1.6. Эллиптическое и гиперболическое мероопределения в пространстве . . . . .	198
§ 2. Вырождающиеся мероопределения . . . . .	199
2.1. Прямая линия . . . . .	199
2.2. Пучок прямых и плоскостей . . . . .	200
2.3. Плоскость . . . . .	201
2.4. Пространство; заключительные замечания . . . . .	204
§ 3. Двойственность . . . . .	204
§ 4. Твердые преобразования . . . . .	206
4.1. Твердые преобразования и преобразования подобия . . . . .	206
4.2. Движения и зеркальные отображения . . . . .	207
4.3. Порождение движений с помощью специальных преобразований . . . . .	208
<b>Глава 7. Соотношения между эллиптической, евклидовой и гиперболической геометриями . . . . .</b>	<b>209</b>
§ 1. Особое положение трех геометрий . . . . .	209
§ 2. Превращение эллиптической геометрии в евклидову и далее в гиперболическую геометрию . . . . .	210
§ 3. Истолкование эллиптической и гиперболической геометрий как геометрий на евклидовой сфере действительного и мнимого радиусов . . . . .	212
§ 4. Вывод формул эллиптической и гиперболической геометрий из формул геометрии на евклидовой сфере . . . . .	214
4.1. Тригонометрические формулы . . . . .	215
4.2. Предельный переход к евклидовой геометрии . . . . .	218
4.3. Формулы длины окружности и площади круга . . . . .	218
§ 5. Сумма углов треугольника и его площадь . . . . .	220
5.1. Эллиптическая геометрия . . . . .	220
5.2. Гиперболическая геометрия . . . . .	221
5.3. Евклидова геометрия . . . . .	223
5.4. Обобщение на случай высших размерностей . . . . .	223
§ 6. Евклидова и обе неевклидовы геометрии как системы мероопределений, применимых к окружающему миру . . . . .	225
<b>Глава 8. Специальное исследование обеих неевклидовых геометрий . . . . .</b>	<b>231</b>
§ 1. Эллиптическая и гиперболическая геометрии на прямой линии . . . . .	231
1.1. Эллиптическая прямая . . . . .	231
1.2. Гиперболическая прямая . . . . .	233
§ 2. Эллиптическая геометрия плоскости . . . . .	234
2.1. Общие замечания; двойственность . . . . .	234
2.2. Движения . . . . .	234
2.3. Некоторые предложения из теории кругов . . . . .	236



2.4.	Теоремы о конгруэнтности . . . . .	237
2.5.	Теоремы о точках пересечения в треугольнике . . . . .	238
2.6.	Заключительные замечания . . . . .	241
§ 3.	Гиперболическая геометрия плоскости . . . . .	241
3.1.	Общие замечания; параллельные линии . . . . .	241
3.2.	О перпендикулярных прямых . . . . .	243
3.3.	Зеркальные отображения . . . . .	244
3.4.	Движения; их классификация по неподвижным элементам; окружности . . . . .	245
3.5.	Заключительные замечания . . . . .	247
§ 4.	Теория кривых второй степени в плоской неевклидовой геометрии . . . . .	248
§ 5.	Эллиптическая геометрия пространства . . . . .	254
5.1.	Общие замечания . . . . .	254
5.2.	Клиффордовы параллели и сдвиги . . . . .	255
5.3.	Произвольные движения, в частности вращения . . . . .	258
5.4.	Гамильтоновы кватернионы и группа эллиптических движений пространства . . . . .	260
§ 6.	Клиффордовы поверхности . . . . .	262
6.1.	Их простейшие свойства . . . . .	262
6.2.	Дифференциальная геометрия клиффордовой поверхности . . . . .	265
6.3.	Геометрия на всей (im Grossen) клиффордовой поверхности . . . . .	269
§ 7.	Гиперболическая геометрия пространства . . . . .	271
7.1.	Общие замечания . . . . .	271
7.2.	Движения . . . . .	271
7.3.	Шаровые поверхности . . . . .	273
7.4.	Об аналитическом изображении движений . . . . .	275
<b>Глава 9.</b>	<b>Проблема пространственных форм . . . . .</b>	<b>276</b>
§ 1.	Пространственные формы плоской евклидовой геометрии . . . . .	276
1.1.	Постановка задачи; геометрия цилиндра и конуса . . . . .	276
1.2.	Пространственная форма клиффордовой поверхности . . . . .	279
1.3.	Связь с теорией групп . . . . .	279
1.4.	Установление всех евклидовых пространственных форм . . . . .	280
1.5.	Связь между соответствующими друг другу одно- и двусторонними пространственными формами . . . . .	285
§ 2.	Пространственные формы плоских эллиптической и гиперболической геометрий . . . . .	286

2.1. Эллиптические пространственные формы . . . . .	287
2.2. Гиперболические пространственные формы . . . . .	287
§ 3. Пространственные формы трехмерных геометрий . . . . .	292

### Часть III

#### Отношения неевклидовой геометрии к другим областям . . . . . 295

#### Глава 10. История неевклидовой геометрии; отношения к аксиоматике и к дифференциальной геометрии . . . . . 296

§ 1. Начала Евклида и попытки доказательства аксиомы о параллельных . . . . .	296
§ 2. Аксиоматическое обоснование гиперболической геометрии . . . . .	299
§ 3. Основы теории поверхностей . . . . .	302
§ 4. Связь плоской неевклидовой геометрии с теорией поверхностей . . . . .	306
§ 5. Расширение дифференциально-геометрической точки зрения, произведенное Риманом . . . . .	313
§ 6. Конформные отображения неевклидовой плоскости . . . . .	318
6.1. Конформное отображение эллиптической и гиперболической плоскостей на сферу . . . . .	318
6.2. Конформное отображение эллиптической и гиперболической плоскостей на евклидову плоскость . . . . .	321
6.3. Конформные отображения гиперболической геометрии на гауссову числовую плоскость . . . . .	324
§ 7. Внедрение проективной геометрии . . . . .	329
§ 8. Дальнейшее построение неевклидовой геометрии, в частности дифференциальной геометрии . . . . .	329

#### Глава 11. Обзор применений неевклидовой геометрии . . . . . 332

§ 1. Гиперболические движения пространства и плоскости и линейные подстановки комплексного переменного . . . . .	332
§ 2. О применениях пространственной гиперболической геометрии к теории линейных подстановок . . . . .	335
§ 3. Автоморфные функции, униформизация и неевклидово мероопределение . . . . .	337
§ 4. Замечания о применении неевклидова мероопределения в топологии . . . . .	342
§ 5. Приложения проективного мероопределения в специальной теории относительности . . . . .	343

#### Предметный указатель . . . . . 347