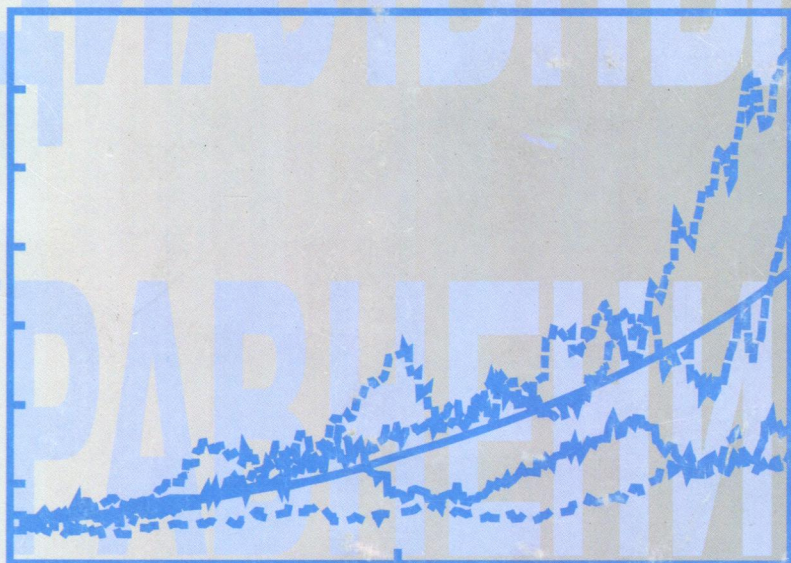


ЛУЧШИЙ  
ЗАРУБЕЖНЫЙ  
УЧЕБНИК

Б. ОКСЕНДАЛЬ

# СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ И ПРИЛОЖЕНИЯ



Издательство «Мир»

ЛУЧШИЙ  
ЗАРУБЕЖНЫЙ  
УЧЕБНИК

Б. Оксендаль

# Стохастические дифференциальные уравнения

Введение в теорию и приложения

Перевод с 5-го исправленного английского издания  
Н. И. Королёвой и А. И. Матасова  
под редакцией В. Б. Колмановского



«Мир»



«АСТ»

Москва 2003

УДК 519.21

ББК 22.171

О 52

**Оксендаль Б.**

052 Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения: Пер. с англ. — М.: Мир, 000 «Издательство АСТ», 2003. — 408 с., ил.— (Лучший зарубежный учебник).

ISBN 5-03-003477-3 («Мир»)

ISBN 5-17-019776-4 («АСТ»)

Учебник по теории и приложениям случайных процессов известного норвежского математика, написанный простым, четким и ясным языком. Для его усвоения достаточно сведений по теории вероятностей в объеме вузовского курса. Автор опускает сложные для понимания доказательства теорем и делает упор на объяснение основных идей и методов. Достоинство книги — демонстрация тесной связи между теорией и практическими приложениями в различных технических областях вплоть до задач экологии и финансовой математики. Каждая глава содержит значительное число тщательно подобранных задач и упражнений с указаниями и решениями.

Для студентов математических и прикладных специальностей университетов, технических и экономических вузов, для специалистов, применяющих современную теорию случайных процессов.

**УДК 519.21**

**ББК 22.171**

ISBN 5-03-003477-3 («Мир»)

ISBN 3-540-63720-6 (англ.)

ISBN 5-17-019776-4 («АСТ»)

Translation from the English  
language edition:  
*Stochastic Differential Equations*  
by Bernt Øksendal  
Copyright©Springer-Verlag  
Berlin Heidelberg 1985, 1989,  
1992, 1995, 1998  
Springer-Verlag is a company in  
the BertelsmannSpringer  
publishing group  
All Rights Reserved

© перевод на русский язык,  
Издательство «Мир», 2003

# Оглавление<sup>1</sup>

Предисловие редактора перевода .....	5
Предисловие к исправленному пятому изданию .....	8
Предисловие к пятому изданию .....	9
Предисловие к четвертому изданию .....	11
Предисловие к третьему изданию .....	12
Предисловие ко второму изданию .....	13
Предисловие к первому изданию .....	14
<b>Глава 1. Введение</b> .....	17
1.1. Стохастические аналоги классических дифференциальных уравнений .....	17
1.2. Задачи фильтрации .....	18
1.3. Стохастический подход к детерминированным краевым задачам .....	19
1.4. Оптимальная остановка .....	19
1.5. Стохастическое управление .....	20
1.6. Финансовая математика .....	21
<b>Глава 2. Предварительные сведения</b> .....	22
2.1. Вероятностные пространства, случайные величины и случайные процессы .....	22
2.2. Важный пример: броуновское движение .....	27
Упражнения .....	31
<b>Глава 3. Интегралы Ито</b> .....	38
3.1. Построение интеграла Ито .....	38
Интеграл Ито .....	43
3.2. Некоторые свойства интеграла Ито .....	49
3.3. Обобщения интеграла Ито .....	53
Сравнение интегралов Ито и Стратоновича .....	55
Упражнения .....	57
<b>Глава 4. Формула Ито и теорема о представлении мартингала</b> .....	64
4.1. Формула Ито для одномерного случая .....	64
4.2. Многомерная формула Ито .....	70

<sup>1</sup> Предисловия, главы 1-8 перевел А. И. Матасов, остальное — Н. И. Королёва. — *Прим. ред.*

4.3. Теорема о представлении мартингала .....	72
Упражнения .....	78
<b>Глава 5. Стохастические дифференциальные уравнения .....</b>	<b>86</b>
5.1. Примеры и некоторые методы решения .....	86
5.2. Существование и единственность решения .....	91
5.3. Слабые и сильные решения .....	97
Упражнения .....	99
<b>Глава 6. Задача фильтрации .....</b>	<b>107</b>
6.1. Введение .....	107
6.2. Одномерная линейная задача фильтрации .....	110
Шаг 1. $Z$ -линейные и $Z$ -измеримые оценки .....	114
Шаг 2. Обновляющий процесс .....	116
Шаг 3. Обновляющий процесс и броуновское движение ..	120
Шаг 4. Явная формула для $X_t$ .....	122
Шаг 5. Стохастическое дифференциальное уравнение .....	123
6.3. Многомерная линейная задача фильтрации .....	132
Упражнения .....	134
<b>Глава 7. Диффузионные процессы. Основные свойства .....</b>	<b>141</b>
7.1. Марковское свойство .....	141
7.2. Строго марковское свойство .....	145
Граничное распределение, гармоническая мера и свойство среднего значения .....	149
7.3. Производящий оператор диффузионного процесса Ито ..	151
7.4. Формула Дынкина .....	155
7.5. Характеристический оператор .....	156
Упражнения .....	159
<b>Глава 8. Другие вопросы теории диффузионных процессов .....</b>	<b>169</b>
8.1. Обратное уравнение Колмогорова. Резольвента .....	169
8.2. Формула Фейнмана—Каца. «Убивание» .....	174
8.3. Задача о мартингале .....	178
8.4. Когда процесс Ито является диффузионным процессом? ..	180
8.5. Случайная замена времени .....	187
8.6. Теорема Гирсанова .....	194
Упражнения .....	202
<b>Глава 9. Приложения к краевым задачам .....</b>	<b>211</b>
9.1. Смешанная задача Дирихле—Пуассона. Единственность ..	211
Смешанная задача Дирихле—Пуассона .....	211
9.2. Задача Дирихле. Регулярные точки .....	214
Задача Дирихле .....	214
Задача Пуассона .....	214
Стохастическая задача Дирихле .....	217
Обобщенная задача Дирихле .....	222
9.3. Задача Пуассона .....	228
Обобщенная задача Пуассона .....	229

Мера Грина .....	233
Упражнения .....	236
<b>Глава 10. Приложение к задаче об оптимальной остановке .....</b>	<b>244</b>
10.1. Случай однородных процессов .....	244
Функции вознаграждения, допускающие отрицательные значения .....	258
10.2. Случай неоднородных процессов .....	259
10.3. Задача об оптимальной остановке, включающая интеграл .....	265
10.4. Связь с вариационными неравенствами .....	267
Упражнения .....	272
<b>Глава 11. Приложение к задаче стохастического управления .....</b>	<b>279</b>
11.1. Постановка задачи .....	279
11.2. Уравнение Гамильтона—Якоби—Беллмана .....	282
11.3. Задачи стохастического управления с терминальными условиями .....	298
Упражнения .....	300
<b>Глава 12. Приложение к задачам финансовой математики .....</b>	<b>308</b>
12.1. Рынок, портфель ценных бумаг и арбитраж .....	308
12.2. Достижимость и полнота .....	319
12.3. Расчет опциона .....	329
Европейские опционы .....	329
Как застраховать достижимый иск .....	333
Обобщенная модель Блэка—Шоулса .....	338
Американские опционы .....	341
Случай диффузии Ито: связь с оптимальной остановкой ..	347
Упражнения .....	352
<b>Приложение А. Нормально распределенные случайные величины ..</b>	<b>359</b>
<b>Приложение В. Условное математическое ожидание .....</b>	<b>363</b>
<b>Приложение С. Равномерная интегрируемость и сходимостъ мартигалов .....</b>	<b>366</b>
<b>Приложение D. Результат аппроксимации .....</b>	<b>370</b>
<b>Решения и дополнительные указания к некоторым упражнениям ...</b>	<b>374</b>
<b>Литература .....</b>	<b>383</b>
<b>Список дополнительной литературы .....</b>	<b>391</b>
<b>Список принятых обозначений .....</b>	<b>392</b>
<b>Предметный указатель .....</b>	<b>396</b>