

**К.Ф. ЧЕРНЫХ**

**НЕЛИНЕЙНАЯ УПРУГОСТЬ  
ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ**

**К. Ф. ЧЕРНЫХ**

**НЕЛИНЕЙНАЯ УПРУГОСТЬ  
(ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ)**

**ИЗДАТЕЛЬСТВО «СОЛО»**

**2004**

УДК 539.3  
ББК 22.251  
Ч - 49

*Представлено к изданию  
Факультетом прикладной математики — процессов управления  
Санкт—Петербургского государственного университета*

**Черных К. Ф.**

Нелинейная упругость (теория и приложения). — СПб.: изд.  
«Соло», 2004. — 420 с.  
ISBN 5-98340-022-3

В книге излагается предельно простая (но без потери общности) авторская версия нелинейной теории упругости. Использование новых граничных условий и законов упругости дало возможность получать точные решения краевых двумерных задач (плоская задача, антиплоская деформация, осесимметричная деформация тел вращения, тонкие пластины). Основное внимание уделено актуальным сингулярным проблемам механики и физики твердого тела (теория трещин, дислокации, физическая мезомеханика и сосредоточенные воздействия). Предложенный автором элементарный метод расчленения граничных условий и условий сопряжения позволил снабдить книгу большим числом решенных актуальных задач нелинейной механики и физики твердого тела. Введены разрешающие статические и дисторсионные функции, удовлетворяющие компактной разрешающей системе координат. Выявлены статические и дисторсионно разрешимые задачи, пригодные для произвольного материала.

Книга предназначена для специалистов, работающих в области механики и физики твердого тела, студентов, аспирантов, а также всех желающих ознакомиться (глазами автора монографии) с современным состоянием дел в этой быстро развивающейся области нелинейной механики и физики твердого тела. Метод изложения, надеемся, не вызовет больших трудностей при ознакомлении с содержанием книги.

The most simple (without loss of generality) author's version of nonlinear theory of elasticity is suggested. Use of new boundary conditions and laws of elasticity gives an opportunity to receive exact solutions of two-dimensional boundary-value problems (plane problem, antiplane deformation, axisymmetric deformation of rotational bodies, thin plates). The main attention is focused on actual singular problems of mechanics and physics of solid body (theory of cracks, dislocations, physical mesomechanics and concentrated exertions).

The book is intended for specialists in the sphere of mechanics and physics of solid body, students, post-graduate students and for all those who wants to become acquainted (from the author's point of view) with modern conditions in this field of nonlinear mechanics and physics of solid body. Author hopes that the account method would not awoke great difficulties while becoming acquainted with contents of the book.



Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту № 04-01-14001.

ISBN 5-98340-022-3

© К.Ф. Черных, 2004

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b>	3
<b>Introduction</b>	13
<b>Содержание</b>	16
<b>Contents</b>	20
<b>Глава 1. Основные зависимости нелинейной теории упругости</b>	
1. Движение и деформация материальной частицы	24
2. Напряжения. Уравнения движения (равновесия)	29
3. Сопряженные по Хиллу (энергетические) пары тензоров	30
4. Изотропный несжимаемый материал	32
5. Изотропный сжимаемый материал	33
6. Изотропный малосжимаемый материал	35
7. Комплексные координаты и компоненты	35
8. Комплексная запись статико-геометрических зависимостей	37
9. Граничные условия. Условия упругого сопряжения	41
10. Использование конформного отображения	46
11. Комплексная форма законов упругости	49
12. Линейная теория упругости	51
13. Структура предложенной версии нелинейной теории упругости	55
<b>Глава 2. Нелинейная плоская задача</b>	
1. Обобщенная плоская деформация	58
2. Плоское напряженное состояние тонкой пластины	61
3. Изотропный материал	62
<b>Глава 3. Геометрически нелинейная плоская задача</b>	
1. Редуцированный стандартный материал	66
2. Плоскость с прямолинейным разрезом	72
3. Плоскость с прямолинейным жестким включением	76
4. Плоскость с вырезом в виде симметричной лунки	79
5. Плоскость с дуговым разрезом	82
6. Плоскость с клиновым вырезом (включением)	84
7. Сосредоточенные силы и момент	89
<b>Глава 4. Общая (геометрически и физически) нелинейная плоская задача</b>	
1. Малосжимаемый материал	92
2. Изотропный малосжимаемый материал	94
3. Плоскость с отверстием	96
4. Прямолинейный разрез	97
5. Плоскость с жестким включением	100
6. Жесткое линейное включение	101
7. Сосредоточенные воздействия и краевые дислокации	102
8. Плоскость с клиновым вырезом (включением)	109
9. Стандартный (нередуцированный) материал	112
<b>Глава 5. Линейная плоская задача</b>	
1. Основные статико-геометрические зависимости	115

2. Закон Гука	117
3. Переход к функциям комплексной переменной	118
4. Плоскость с прямолинейным разрезом	121
5. Предварительно напряженный материал	125
<b>Глава 6. Обобщенная антиплоская деформация изотропного материала</b>	
1. Основные статико-геометрические зависимости	129
2. Двухконстантный материал	134
3. Плоскость с отверстием и жестким включением	135
4. Плоскость с прямолинейным разрезом	137
5. Плоскость с прямолинейным жестким включением.	139
6. Сосредоточенные сила и моменты	140
7. Плоскость с клиновым вырезом	141
8. Линейная антиплоская деформация	143
9. Несколько замечаний	144
<b>Глава 7. Нелинейные комплексные инвариантные интегралы</b>	
1. Плоская задача	147
2. Плоскость с прямолинейным разрезом	151
3. Дополнительный комплексный инвариантный интеграл	155
4. Нелинейная асимптотика в угловой точке	159
5. Обобщенная антиплоская деформация	164
6. Обобщенная антиплоская деформация плоскости с прямолинейным разрезом	165
7. То же, но с прямолинейным жестким включением	168
8. Плоскость с клиновым вырезом (при обобщенной антиплоской деформации)	172
<b>Глава 8. Немного об анизотропии и кристаллографии. Идеальная прочность</b>	
1. Симметрия анизотропных сред и кристаллов	176
2. Кристаллические решетки.	182
3. Узловые прямые и плоскости кристаллической решетки	186
4. Идеальная прочность (экспериментальный подход)	189
5. Идеальная прочность (теоретический подход)	190
<b>Глава 9. Анизотропная теория упругости</b>	
1. Линейная анизотропия	196
2. Приведенные изотропные упругие постоянные. Приведение по Фоггу-Федорову	201
3. Нелинейная анизотропия. Инвариантные блоки и базисные инварианты	204
<b>Глава 10. Анизотропная плоская задача</b>	
1. Обобщенный закон Гука	209
2. Базисные инварианты нелинейной плоской задачи	212
3. Стандартный анизотропный материал	213
4. Малосжимаемый анизотропный материал	219
<b>Глава 11. Обобщенная антиплоская деформация анизотропного материала</b>	
1. Линейная анизотропия	222
2. Нелинейная анизотропия	223
3. Стандартный анизотропный материал. Плоскость с отверстием	223
4. Плоскость с прямолинейным жестким включением	226
<b>Глава 12. Осесимметричная деформация тел вращения</b>	
1. Деформационные зависимости	229
2. Закон упругости	231
3. Уравнения движения. Граничные условия	233

4. Редуцированный стандартный материал	236
5. Малосжимаемый материал	237
6. Тонкий слой	239
7. Сжатие с проскальзыванием цилиндрического слоя	241
<b>Глава 13. Дислокации Вольтерра (линейный подход)</b>	
1. Основные понятия и зависимости	244
2. Краевые дислокации	247
3. Клиновья дисклинация	250
4. Винтовая дислокация	253
<b>Глава 14. Дислокации в кристаллах (линейный подход)</b>	
1. Дислокации в кристаллах	255
2. Перемещение краевой дислокации	258
3. Дислокационноподвижная сила (сила скольжения)	259
4. Взаимодействие дислокаций	261
5. Взаимодействие дислокации со свободной прямолинейной границей	263
6. Взаимодействие краевых дислокаций с концом трещины	265
7. Среднее дислокационное изменение объема	269
<b>Глава 15. Дислокации в кристаллах (нелинейный подход)</b>	
1. Дислокационноподвижная сила (сила скольжения). Взаимодействие прямолинейных краевых дислокаций	271
2. Взаимодействие дислокации со свободной границей	275
3. Взаимодействие краевых дислокаций с концами трещины	278
4. Среднее дислокационное изменение объема (дилатация)	281
5. Линейность или нелинейность?	282
<b>Глава 16. Линейная теория трещин</b>	
1. Основные понятия теории трещин	286
2. Энергетическая теория Гриффитса	287
3. Критерий Ирвина	290
4. Подход Баренблата	291
5. Деформационный критерий Леонова–Панасюка–Дагдейла	293
6. Концепция Новожилова	298
<b>Глава 17. Нелинейная теория трещин</b>	
1. Пригодность истинных напряжений	307
2. Условные и линейные напряжения	310
3. Условные напряжения	311
4. Следящая нагрузка — нормальное давление	313
5. Трещина смешанного типа (линейный подход)	315
6. Трещина смешанного типа (геометрически нелинейный подход)	316
7. Трещины нормального отрыва и поперечного сдвига	320
8. Условия хрупкого разрушения	321
9. Уточнение дискретного критерия нормального отрыва	322
<b>Глава 18. Сосредоточенные силы и моменты</b>	
1. Плоская задача (линейный подход)	324
2. Задача Фламана	326
3. Обобщенная задача Фламана	329
4. Сосредоточенные воздействия в полуплоскости	334
5. Антиплоская деформация (линейный подход)	341
6. Антиплоская деформация (нелинейный подход)	343

<b>Глава 19. Расчленение условий сопряжения. Зародыш в матрице</b>	
1. Плоская задача	345
2. Однородно деформированное эллиптическое включение	349
3. Включение при сосредоточенной силе и краевой дислокации	352
4. Включение в конечную матрицу	355
5. Термодинамические условия сопряжения (плоская задача)	358
6. Плоскость с включением (антиплоская деформация)	362
7. Термодинамическое условие сопряжения (антиплоская деформация)	364
<b>Заключение</b>	
1. Развитие комплексного метода	368
2. Истинные или условные?	369
3. Точные решения нелинейных задач	373
4. Нелинейные инвариантные интегралы ( $J$ — интегралы)	374
5. Проблемы анизотропии	375
6. Нелинейная теория трещин	376
7. Сосредоточенные силы и моменты	377
8. Дислокации Вольтерра. Дислокации в кристаллах	378
9. Немного об использовании численных методов	379
10. Структура предложенной версии нелинейной теории упругости. Статические и дисторсионные разрешающие функции. Статически и дисторсионно определяемые задачи. Расчленение граничных условий и условий сопряжения. Обобщенные теоремы Эшелби.	380
11. Итоги	385
<b>Results</b>	389
<b>Указатель литературы</b>	392