

В. П. Казанцев

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОСТАТИКА НА ПЛОСКОСТИ

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ МУЛЬТИПОЛИ
ОДНОРОДНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТЕЛ
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Монография

Книга 1

Институт фундаментальной подготовки



СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

Министерство образования и науки Российской Федерации
Сибирский федеральный университет

В. П. Казанцев

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОСТАТИКА НА ПЛОСКОСТИ

**ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ МУЛЬТИПОЛИ
ОДНОРОДНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТЕЛ
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ**

Монография

В двух книгах

Книга 1

Красноярск
СФУ
2013

УДК 517+530.1
ББК 22.33
К142

Рецензент:

А. К. Цих, доктор физико-математических наук, профессор

Казанцев, В. П.

К142 Аналитическая электростатика на плоскости. Характеристические мультиполи однородных диэлектрических тел и их приложения : монография : в 2 кн. Кн. 1 / В. П. Казанцев. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2013. – 470 с.
ISBN 978-5-7638-2916-7 (Кн. 1)
ISBN 978-5-7638-2870-2

Введены новые для теории поля понятия характеристических мультиполей и высших поляризуемостей диэлектрических тел. Понятия характеристических мультиполей относительно точки введены для однородных изотропных диэлектрических тел. На примерах продемонстрировано, что введенные понятия находят широкое применение в электростатике проводников и диэлектриков.

Книга будет полезна научным работникам и инженерам, использующим в своей практике теорию поля, а также студентам, обучающимся в магистратуре по специальности «Теоретическая и математическая физика».

Электронный вариант издания см.:
<http://catalog.sfu-kras.ru>

УДК 517+530.1
ББК 22.33

ISBN 978-5-7638-2916-7 (Кн. 1)
ISBN 978-5-7638-2870-2

© Сибирский федеральный университет, 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Глава 1. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ МУЛЬТИПОЛИ ОДНОРОДНОГО ИЗОТРОПНОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТЕЛА	6
1.1. Вариационные формулировки задачи о взаимодействии диэлектрического тела с внешним электрическим полем	6
1.1.1. Основной вариационный принцип для задачи о взаимодействии диэлектрического тела с внешним электрическим полем	6
1.1.2. Дуальный вариационный принцип для задачи о взаимодействии диэлектрического тела с внешним электрическим полем	8
1.1.3. Вариационные принципы для задачи о взаимодействии однородного изотропного диэлектрического тела с внешним электрическим полем на плоскости	14
1.2. Характеристические мультиполи однородной изотропной диэлектрической области на плоскости	16
1.2.1. Характеристический диполь однородного изотропного диэлектрического тела	16
1.2.2. Характеристический квадруполь однородного изотропного диэлектрического тела	21
1.2.3. Характеристический мультиполь порядка n однородного изотропного диэлектрического тела	25
1.3. Построение комплексных потенциалов характеристических мультиполей однородных изотропных диэлектрических тел с помощью характеристических мультиполей проводников, имеющих ту же форму	29
1.3.1. Характеристические мультиполи проводников	29
1.3.2. Вариационные схемы расчета характеристического диполя однородной изотропной диэлектрической области с использованием характеристических мультиполей проводника той же формы	33
1.3.3. Вариационные схемы расчета характеристического мультиполя произвольного порядка однородной изотропной диэлектрической области с использованием характеристических мультиполей проводника той же формы	38
1.4. Решение задач электростатики с помощью аппарата характеристических мультиполей и высших поляризуемостей	43
1.4.1. Прямая и обратная задачи об однородном изотропном диэлектрическом теле во внешнем электрическом поле	43
1.4.2. Проблема моментов для однородного изотропного диэлектрического тела и её решение на основе аппарата характеристических мультиполей	46
1.4.3. Характеристические мультиполи и решения электростатических задач для однородного изотропного диэлектрического круга	49

1.4.4. Характеристические мультиполи и решения электростатических задач для однородной изотропной диэлектрической области, ограниченной эллипсом	53
1.5. Характеристические мультиполи полости в однородном изотропном диэлектрике	59
1.5.1. Эквивалентность задач о характеристических мультиполях однородного изотропного диэлектрического тела и характеристических мультиполях полости в однородном изотропном диэлектрике.....	59
1.5.2. Характеристические мультиполи и решения электростатических задач для круговой полости в однородном изотропном диэлектрике	60

Глава 2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ МУЛЬТИПОЛИ ОДНОРОДНОГО ИЗОТРОПНОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ..... 64

2.1. Возникновение понятий о характеристических мультиполях однородного изотропного диэлектрического тела относительно точки	64
2.1.1. Преобразование характеристических мультиполей однородного изотропного диэлектрического тела при дробно-линейном преобразовании комплексной плоскости	64
2.1.2. Характеристические мультиполи круговой полости в однородном изотропном диэлектрике относительно центра полости	67
2.1.3. Примеры использования аппарата характеристических мультиполей круговой полости в однородном изотропном диэлектрике относительно центра полости	70
2.1.4. Простые вариационные оценки сверху для матрицы потенциальных коэффициентов проводящих кругов, расположенных внутри круговой полости.....	74
2.2. Характеристические мультиполи однородного изотропного диэлектрического круга относительно его центра	77
2.2.1. Электрическое поле зарядов, расположенных внутри однородного изотропного диэлектрического круга.....	77
2.2.2. Примеры использования аппарата характеристических мультиполей однородного изотропного диэлектрического круга	84
2.2.3. Примеры расчетов электрических полей и энергий взаимодействий систем свободных зарядов, распределенных по окружности внутри диэлектрического круга	87
2.2.4. Простые вариационные оценки сверху для матрицы потенциальных коэффициентов проводящих кругов, расположенных внутри однородного изотропного диэлектрического круга.....	92
2.3. Характеристические мультиполи диэлектрических тел относительно внутренних и внешних точек.....	94
2.3.1. Характеристические мультиполи однородной изотропной диэлектрической полуплоскости относительно внешней точки	94

2.3.2. Характеристические мультиполи однородной изотропной диэлектрической полуплоскости относительно внутренней точки	97
2.3.3. Характеристические мультиполи однородного изотропного диэлектрического круга относительно внешних и внутренних точек	101
2.3.4. Характеристические мультиполи круговой полости в однородном изотропном диэлектрике относительно внутренних и внешних точек	105

Глава 3. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ МУЛЬТИПОЛИ КОЛЬЦЕВЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ..... 111

3.1. Однородное изотропное круговое концентрическое диэлектрическое кольцо во внешних электрических полях.....	111
3.1.1. Внешние характеристические мультиполи для однородного изотропного диэлектрического кругового концентрического кольца.....	111
3.1.2. Комплексные потенциалы точечных мультиполей, расположенных во внешней к круговому однородному изотропному диэлектрическому кольцу области.....	114
3.1.3. Внутренние характеристические мультиполи для однородного изотропного диэлектрического кругового концентрического кольца.....	118
3.1.4. Комплексные потенциалы точечных мультиполей, расположенных во внутренней области кругового однородного изотропного диэлектрического кольца.....	122
3.1.5. Электрические поля точечных мультиполей, расположенных в области диэлектрического кольца	126
3.2. Однородное изотропное круговое неконцентрическое диэлектрическое кольцо во внешних электрических полях.....	132
3.2.1. Система базисных характеристических мультиполей относительно внешней сопряженной точки кругового однородного изотропного диэлектрического неконцентрического кольца.....	132
3.2.2. Комплексные потенциалы точечных мультиполей, расположенных во внешней к круговому неконцентрическому однородному изотропному диэлектрическому кольцу области.....	135
3.2.3. Система базисных характеристических мультиполей относительно внутренней сопряженной точки кругового однородного изотропного диэлектрического неконцентрического кольца	139
3.2.4. Комплексные потенциалы точечных мультиполей, расположенных во внутренней к круговому неконцентрическому однородному изотропному диэлектрическому кольцу области.....	141
3.2.5. Построение характеристических мультиполей однородного изотропного неконцентрического диэлектрического кольца	147
3.3. Однородная изотропная круговая кольцевая полость в однородном диэлектрике	152
3.3.1. Характеристические мультиполи круговой концентрической кольцевой полости в однородной изотропной диэлектрической среде.....	152

3.3.2. Функция Грина круговой концентрической кольцевой полости в однородной изотропной диэлектрической среде	159
3.3.3. Комплексные потенциалы точечных мультиполей, расположенных в круговой концентрической кольцевой полости в однородной изотропной диэлектрической среде.....	162
3.3.4. Простые вариационные оценки сверху для матрицы потенциальных коэффициентов проводящих кругов, расположенных в круговой концентрической кольцевой полости в однородной изотропной диэлектрической среде.....	165
3.4. Два однородных изотропных диэлектрических круга с одинаковой диэлектрической проницаемостью во внешних электрических полях	168
3.4.1. Система базисных характеристических мультиполей двух однородных изотропных диэлектрических кругов относительно их сопряженных точек	168
3.4.2. Функция Грина двух однородных изотропных диэлектрических кругов с одинаковой диэлектрической проницаемостью.....	174
3.4.3. Комплексные потенциалы точечных мультиполей, расположенных вне двух однородных изотропных диэлектрических кругов, имеющих одинаковую диэлектрическую проницаемость	178
3.4.4. Два однородных изотропных диэлектрических круга имеющих одинаковую диэлектрическую проницаемость, в однородном электрическом поле	180

Глава 4. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРОВОДЯЩИХ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЭКРАНОВ, ОГРАНИЧЕННЫХ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРЯМЫМИ 186

4.1. Электрические поля точечных мультиполей, экранированных однородной диэлектрической полуплоскостью с расположенным на ней однородным диэлектрическим слоем	186
4.1.1. Точечный диполь, экранированный однородной диэлектрической полуплоскостью с расположенным на ней однородным диэлектрическим слоем.....	186
4.1.2. Функция Грина полуплоскости, ограниченной однородной диэлектрической полуплоскостью с расположенным на ней однородным диэлектрическим слоем.....	190
4.1.3. Точечные мультиполи, экранированные однородной диэлектрической полуплоскостью с расположенным на ней однородным диэлектрическим слоем	193
4.1.4. Функция Грина первого квадранта, ограниченного левой однородной диэлектрической полуплоскостью с расположенным на ней однородным диэлектрическим слоем и нижней проводящей полуплоскостью.....	196

4.2. Электростатические задачи для диэлектрического круга, образованного из двух однородных диэлектриков, разделенных окружностью соприкасающейся с внешней границей	198
4.2.1. Задача о дипольной поляризуемости для диэлектрического круга, образованного из двух однородных диэлектриков, разделенных окружностью, соприкасающейся с внешней границей	198
4.2.2. Диэлектрический круг, образованный из двух однородных диэлектриков, разделенных окружностью, соприкасающейся с внешней границей, во внешних электрических полях с источниками в бесконечно удаленной точке	202
4.2.3. Диэлектрический круг, образованный из двух однородных диэлектриков, разделенных окружностью, соприкасающейся с внешней границей, во внешних электрических полях точечных источников	207
4.3. Электрические задачи для полосы, ограниченной однородными диэлектриками	212
4.3.1. Точечный диполь, экранированный в полосе, ограниченной однородными диэлектриками	212
4.3.2. Дипольная поляризуемость двух однородных диэлектрических соприкасающихся кругов	216
4.3.3. Функция Грина полосы, ограниченной однородными диэлектрическими полуплоскостями	220
4.3.4. Точечные мультиполи, расположенные в полосе, ограниченной однородными диэлектрическими полуплоскостями	225
4.3.5. Два соприкасающихся однородных диэлектрических круга в электрических полях с источниками в бесконечно удаленной точке	228
4.4. Электростатические задачи для диэлектрической полосы	231
4.4.1. Функция Грина диэлектрической полосы	231
4.4.2. Энергетические соотношения для точечных зарядов в присутствии диэлектрической полосы	235
4.4.3. Электрические поля точечных мультиполей в присутствии диэлектрической полосы	238
4.4.4. Энергетические соотношения для точечных мультиполей в присутствии диэлектрической полосы	241
4.4.5. Характеристические мультиполи диэлектрической полосы относительно точки	244
4.5. Электростатические задачи для полосы, ограниченной с одной стороны однородным диэлектриком, а с другой - проводником	251
4.5.1. Функции Грина полосы, ограниченной однородной диэлектрической полуплоскостью и проводящей полуплоскостью, и диэлектрической полуплоскости, отделенной от проводящей полуплоскости полосой	251
4.5.2. Электрические поля точечных мультиполей, расположенных в полосе, ограниченной с одной стороны однородным диэлектриком, а с другой - проводником	254

4.5.3. Электрические поля точечных мультиполей, расположенных на диэлектрической полуплоскости, отделенной от проводящей полуплоскости полосой.....	257
4.5.4. Разделенные полосой проводящая и диэлектрическая полуплоскости во внешнем электрическом поле.....	260
4.5.5. Характеристические мультиполи полосы, ограниченной проводником и диэлектриком, относительно точки.....	263
4.5.6. Функция Грина полуполосы, ограниченной по двум смежным сторонам проводником, а с третьей – однородным диэлектриком.....	265
4.5.7. Соприкасающиеся проводящий и диэлектрический круги во внешнем электрическом поле.....	268
4.6. Электростатические задачи для полосы, ограниченной однородным диэлектриком.....	276
4.6.1. Функция Грина на однородной диэлектрической комплексной плоскости с вырезанной на ней полосой.....	276
4.6.2. Электрические поля точечных мультиполей, расположенных в полосе, ограниченной однородным диэлектриком.....	279
4.6.3. Два однородных изотропных соприкасающихся диэлектрических круга с одинаковой диэлектрической проницаемостью во внешних электрических полях.....	282

Глава 5. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ МУЛЬТИПОЛИ ОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТЕЛ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ..... 292

5.1. Заряды на однородной анизотропной диэлектрической плоскости.....	292
5.1.1. Уравнения электростатики на однородной анизотропной диэлектрической плоскости.....	292
5.1.2. Вариационные принципы и уравнения электростатики на однородной анизотропной диэлектрической плоскости.....	294
5.1.3. Общие соотношения, используемые для решения задачи об электрическом поле распределений зарядов на однородной анизотропной диэлектрической плоскости.....	296
5.1.4. Электрические поля точечных зарядов на однородной анизотропной диэлектрической плоскости.....	298
5.1.5. Мультипольные разложения конечных распределений зарядов на однородной анизотропной диэлектрической плоскости.....	301
5.2. Электрические потенциалы и поля некоторых распределений зарядов на однородной анизотропной диэлектрической плоскости.....	305
5.2.1. Равномерно заряженный круг на однородной анизотропной диэлектрической плоскости.....	305
5.2.2. Равномерно заряженная окружность на однородной анизотропной диэлектрической плоскости.....	307
5.2.3. Равномерно заряженный отрезок и прямая линия на однородной анизотропной диэлектрической плоскости.....	309

5.2.4. Заряженная окружность на однородной анизотропной диэлектрической плоскости	314
5.2.5. Заряженный отрезок на однородной анизотропной диэлектрической плоскости	320
5.3. Проводники на однородной анизотропной диэлектрической плоскости.....	324
5.3.1. Общие соображения.....	324
5.3.2. Электрическое поле точечного заряда, экранированного проводящей прямой линией на однородной анизотропной диэлектрической плоскости.....	326
5.3.3. Характеристические мультиполи окружности, расположенной на однородной анизотропной диэлектрической плоскости	328
5.3.4. Проводящая окружность на однородной анизотропной диэлектрической плоскости в поле точечного заряда.....	335
5.4. Характеристические мультиполи проводников на однородной анизотропной диэлектрической плоскости	342
5.4.1. Предварительные замечания	342
5.4.2. Характеристические мультиполи эллипса, расположенного на однородной анизотропной диэлектрической плоскости	343
5.4.3. Проводящая прямая линия во внешних электрических полях	347
5.4.4. Точечные мультиполи, экранированные проводящей прямой линией, на однородной анизотропной диэлектрической плоскости.....	353
5.4.5. Характеристические мультиполи прямой линии, расположенной на однородной анизотропной диэлектрической плоскости, относительно точки	357
5.5. Электростатические задачи для области, расположенной на однородной анизотропной диэлектрической плоскости и ограниченной двумя прямолинейными проводниками	359
5.5.1. Функция Грина полосы, расположенной на однородной анизотропной диэлектрической плоскости	359
5.5.2. Электрическое поле точечного диполя, экранированного в полосе, расположенной на однородной анизотропной диэлектрической плоскости.....	363
5.5.3. Функция Грина сектора, расположенного на однородной анизотропной диэлектрической плоскости	367
5.5.4. Электрическое поле точечного диполя, экранированного в секторе, расположенном на однородной анизотропной диэлектрической плоскости.....	371

Глава 6. РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ, АНИЗОТРОПНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КРУГА, ПОЛУПЛОСКОСТИ И ЭЛЛИПСА	376
6.1. Решение основной задачи электростатики для однородного анизотропного диэлектрического круга	376

6.1.1. Характеристические мультиполи однородного анизотропного диэлектрического круга	376
6.1.2. Представление характеристических мультиполей однородного анизотропного диэлектрического круга в декартовых координатах плоскости z	384
6.1.3. Однородный анизотропный диэлектрический круг во внешних электрических полях	395
6.2. Решение основной задачи электростатики для однородной анизотропной полуплоскости	416
6.2.1. Поля электрических зарядов, экранированных однородной анизотропной диэлектрической полуплоскостью.....	416
6.2.2. Однородная анизотропная диэлектрическая полуплоскость во внешних электрических полях.....	423
6.2.3. Характеристические мультиполи однородной анизотропной диэлектрической полуплоскости относительно точки	432
6.3. Однородная анизотропная диэлектрическая область, ограниченная эллипсом	437
6.3.1. Однородная анизотропная диэлектрическая область, ограниченная эллипсом, в однородном электрическом поле.....	437
6.3.2. Характеристический квадруполь однородной анизотропной диэлектрической области, ограниченной эллипсом	440
6.3.3. Характеристические мультиполи однородной анизотропной диэлектрической области, ограниченной эллипсом, при условии совпадения направлений главных осей эллипса и тензора диэлектрической проницаемости.....	446
6.3.4. Характеристические мультиполи однородной анизотропной диэлектрической области, ограниченной эллипсом	452
Список литературы.....	460