

The background of the cover is a complex, abstract pattern. It features a dark blue and black base with vibrant, wavy bands of light blue, green, and purple. Several thin, bright lines of light, including a prominent red one on the right and a green one on the left, intersect the wavy patterns, creating a sense of dynamic energy and light refraction.

Е. В. ЧИЖОНКОВ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
АСПЕКТЫ  
МОДЕЛИРОВАНИЯ  
КОЛЕБАНИЙ  
И  
КИЛЬВАТЕРНЫХ ВОЛН  
В ПЛАЗМЕ**

Е. В. ЧИЖОНКОВ

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
АСПЕКТЫ  
МОДЕЛИРОВАНИЯ  
КОЛЕБАНИЙ  
И  
КИЛЬВАТЕРНЫХ ВОЛН  
В ПЛАЗМЕ**



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2018

УДК 533  
ББК 22.311; 22.333  
Ч 59



*Издание осуществлено при поддержке  
Российского фонда фундаментальных  
исследований по проекту 18-11-00006,  
не подлежит продаже*

**Чижонков Е. В. Математические аспекты моделирования колебаний и кильватерных волн в плазме.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018. — 256 с. — ISBN 978-5-9221-1794-4.

Монография посвящена исследованиям в актуальной области математического моделирования — в современных задачах физики плазмы, связанных с колебаниями и кильватерными волнами, возбуждаемыми коротким мощным лазерным импульсом. Впервые в одной книге подробно и с различных точек зрения изучена гидродинамическая модель кильватерной волны, в рамках которой проанализированы как ее регулярное распространение — развитие, пригодное для ускорения электронов, так и завершающий эффект опрокидывания, приводящий к нерегулируемой передаче энергии частицам плазмы. Исследования плазменных колебаний большой амплитуды представляют самостоятельный интерес, хотя ориентированы в первую очередь на анализ эффекта опрокидывания.

Для научных работников в области вычислительной математики, аспирантов и студентов, а также инженеров и исследователей в прикладных областях знания, которые используют в своей деятельности аналитические, асимптотические и численные методы.

ISBN 978-5-9221-1794-4

© ФИЗМАТЛИТ, 2018  
© Е. В. Чижонков, 2018

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	6
<b>Часть I. Свободные плазменные колебания</b>	
<b>Глава 1. Вводные сведения . . . . .</b>	<b>12</b>
1.1. Что такое опрокидывание? . . . . .	12
1.2. Физическая модель и основные уравнения . . . . .	15
1.3. О начальных условиях . . . . .	21
1.4. О граничных условиях . . . . .	24
1.5. Библиография и комментарии . . . . .	26
<b>Глава 2. Плоские одномерные нерелятивистские электронные колебания . . . . .</b>	<b>30</b>
2.1. Постановка задачи в эйлеровых и лагранжевых переменных . . . . .	30
2.2. Аксиальные решения . . . . .	32
2.3. «Треугольные» решения . . . . .	40
2.3.1. Простые решения . . . . .	40
2.3.2. Составные решения . . . . .	41
2.4. Численно-аналитический метод . . . . .	43
2.5. Библиография и комментарии . . . . .	46
<b>Глава 3. Плоские одномерные релятивистские электронные колебания . . . . .</b>	<b>50</b>
3.1. Постановка задачи в эйлеровых и лагранжевых переменных . . . . .	50
3.2. Теоретические предпосылки опрокидывания . . . . .	52
3.2.1. Квадратичный сдвиг частоты . . . . .	52
3.2.2. Нарушение свойства инвариантности . . . . .	54
3.3. Метод в лагранжевых переменных . . . . .	55
3.4. Сценарий развития – завершения колебаний . . . . .	57
3.5. Метод в эйлеровых переменных . . . . .	61
3.6. Искусственные граничные условия . . . . .	64
3.6.1. Полное затухание колебаний . . . . .	65
3.6.2. Линеаризация исходных уравнений . . . . .	66
3.6.3. Учет слабой нелинейности исходных уравнений . . . . .	66
3.6.4. Ухудшение аппроксимации на границе . . . . .	67
3.7. Библиография и комментарии . . . . .	69
<b>Глава 4. Цилиндрические одномерные релятивистские и нерелятивистские электронные колебания . . . . .</b>	<b>73</b>
4.1. Постановки задач в эйлеровых и лагранжевых переменных . . . . .	73
4.2. Аналитические исследования . . . . .	77
4.2.1. Аксиальное решение . . . . .	77
4.2.2. Метод возмущений . . . . .	81

4.3. Метод конечных разностей . . . . .	83
4.3.1. Вспомогательные конструкции . . . . .	83
4.3.2. Построение разностных схем . . . . .	85
4.3.3. Сценарий процесса . . . . .	87
4.4. Метод частиц . . . . .	90
4.5. Расчет аксиальных решений . . . . .	95
4.5.1. Свободные нерелятивистские колебания . . . . .	95
4.5.2. Вынужденные релятивистские колебания . . . . .	99
4.6. О сферических колебаниях . . . . .	106
4.6.1. Постановки задач . . . . .	106
4.6.2. Аксиальное решение . . . . .	109
4.6.3. Метод возмущений . . . . .	111
4.6.4. К численному моделированию . . . . .	112
4.7. Библиография и комментарии . . . . .	114
<b>Глава 5. Влияние динамики ионов на плоские одномерные колебания</b> . . . . .	117
5.1. Постановка задачи . . . . .	117
5.2. Масштабирование уравнений и разностная схема . . . . .	120
5.3. Аксиальное решение . . . . .	124
5.4. Результаты расчетов . . . . .	127
5.5. Библиография и комментарии . . . . .	131
<b>Глава 6. Плоские двумерные релятивистские электронные колебания</b> . . . . .	133
6.1. Постановка задачи . . . . .	133
6.2. Асимптотическая теория . . . . .	134
6.3. Разностная схема . . . . .	138
6.3.1. Разностные уравнения во внутренних узлах сетки . . . . .	139
6.3.2. Реализация искусственных граничных условий . . . . .	141
6.4. Численные эксперименты . . . . .	143
6.4.1. Общие замечания . . . . .	143
6.4.2. Расчеты с круговой симметрией . . . . .	145
6.4.3. Квазиодномерная модель . . . . .	148
6.4.4. Малое отклонение от круговой симметрии . . . . .	152
6.4.5. Значимое отличие от круговой симметрии . . . . .	155
6.5. Библиография и комментарии . . . . .	159
<b>Часть II. Плазменные кильватерные волны</b>	
<b>Глава 7. Предварительные сведения</b> . . . . .	161
7.1. Исходные уравнения . . . . .	161
7.2. Случай произвольной скорости импульса . . . . .	164
7.2.1. Уравнения в скалярной форме . . . . .	164
7.2.2. Новые координаты и квазистатика . . . . .	165
7.2.3. Уравнения в безразмерных переменных . . . . .	166
7.2.4. Уравнения в удобных переменных . . . . .	166
7.3. Базовая постановка задачи . . . . .	168
7.3.1. Нелинейная постановка . . . . .	169
7.3.2. Линеаризованная постановка . . . . .	171

7.4. «Медленный» импульс . . . . .	172
7.4.1. Линеаризованные уравнения . . . . .	172
7.4.2. Вспомогательная задача Коши . . . . .	173
7.4.3. Численно-асимптотический метод . . . . .	176
7.5. Библиография и комментарии . . . . .	178
<b>Глава 8. Численные алгоритмы для базовой задачи . . . . .</b>	<b>182</b>
8.1. Разностный метод I . . . . .	182
8.1.1. Построение разностной схемы . . . . .	182
8.1.2. Исследование схемы в вариациях . . . . .	185
8.1.3. Алгоритм реализации разностной схемы I . . . . .	187
8.2. Разностный метод II . . . . .	188
8.2.1. Построение разностной схемы . . . . .	189
8.2.2. Исследование схемы в вариациях . . . . .	190
8.2.3. Алгоритм реализации разностной схемы II . . . . .	191
8.3. Разностный метод III (метод линеаризации) . . . . .	192
8.3.1. Постановка задачи в удобной форме . . . . .	193
8.3.2. Предварительные преобразования . . . . .	194
8.3.3. Разностный метод III в линейном случае . . . . .	195
8.3.4. Разностный метод III в нелинейном случае . . . . .	196
8.4. Проекционный метод . . . . .	197
8.4.1. Постановка задачи в удобной форме . . . . .	198
8.4.2. Описание проекционного метода . . . . .	199
8.4.3. Численная реализация проекционного метода . . . . .	201
8.5. Численные эксперименты и сравнение методов . . . . .	202
8.6. Библиография и комментарии . . . . .	208
<b>Глава 9. Дополнительные исследования . . . . .</b>	<b>213</b>
9.1. Аксиальное решение для кильватерной волны . . . . .	213
9.1.1. Постановка «усеченной» задачи . . . . .	213
9.1.2. Численный алгоритм для решения «усеченной» задачи . . . . .	216
9.1.3. Результаты расчетов . . . . .	217
9.2. Учет динамики ионов в кильватерной волне . . . . .	221
9.2.1. Постановка задачи в физических переменных . . . . .	221
9.2.2. Постановка задачи в удобных переменных . . . . .	223
9.2.3. Метод решения . . . . .	225
9.2.4. Результаты расчетов . . . . .	228
9.3. Импульс эллиптического сечения . . . . .	230
9.3.1. Постановка задачи . . . . .	230
9.3.2. Разностная схема и метод решения . . . . .	233
9.3.3. Результаты расчетов . . . . .	237
9.4. Библиография и комментарии . . . . .	239
Заключение . . . . .	241
Список литературы . . . . .	243