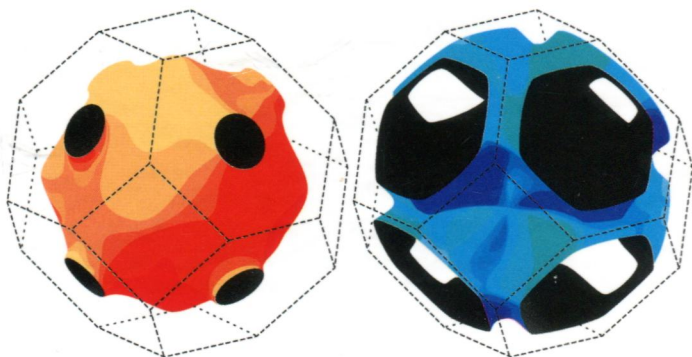
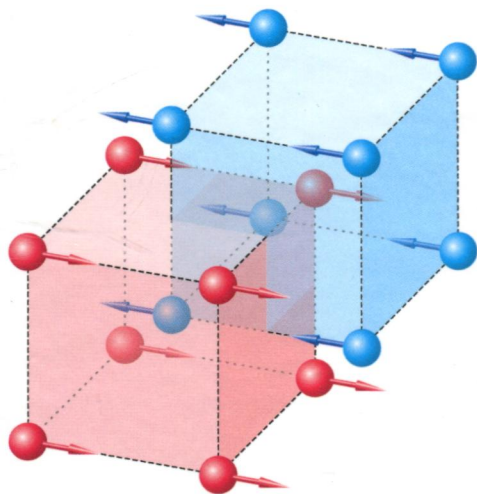


А.Б. Борисов
В.В. Зверев

Введение в регулярную и хаотическую динамику



РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ МЕТАЛЛОВ

НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ СЕРИЯ
ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД

8

А.Б. Борисов, В.В. Зверев

ВВЕДЕНИЕ
В РЕГУЛЯРНУЮ
И ХАОТИЧЕСКУЮ
ДИНАМИКУ

ЕКАТЕРИНБУРГ

2014

УДК 531.3, 534
ББК 22.213
Б82

Рекомендовано к изданию ученым советом
Института физики металлов и НИСО УрО РАН

Б 82 Борисов А.Б., Зверев В.В.
Введение в регулярную и хаотическую динамику / А.Б. Борисов, В.В. Зверев. –
Екатеринбург: ИО УрО РАН, 2014. – 568 с. – (Научно-образовательная
серия «Физика конденсированных сред», 8).
ISBN 978-5-7691-2385-6

Дан краткий очерк развития механики в исторической перспективе, позволивший продемонстрировать как непрерывный характер развития науки, так и то, что знания о природе в любой исторический период несовершенны. Этот материал должен с интересом восприниматься современными студентами, побуждая их к творческой деятельности. Рассмотрены основные принципы теоретической механики. Представлены наиболее содержательные и ценные для теории и приложений методы аналитической механики и нелинейной динамики: метод фазового пространства, метод показателей Ляпунова, приближенные методы анализа малоамплитудных колебаний, включая метод многих масштабов и метод усреднения. Дано элементарное введение в теорию интегрируемых систем и теорию солитонов. Изложен современный алгоритм поиска интегрируемых систем. На примере динамики частиц в решетке Тоды описаны методы обратной задачи рассеяния и обсуждается новый тип локализованных возбуждений – солитонов. Исследуются механизмы возникновения хаотических режимов движения в неинтегрируемых консервативных и диссипативных системах с неустойчивой динамикой. Приводятся сведения из истории открытия хаотических (странных) аттракторов, вводящие читателя в мир геометрии самоподобных объектов и фрактальной динамики. Даны основы теории мультифрактальной структуры хаотических аттракторов, возникающих в динамике нелинейных диссипативных систем.

Монография предназначена для физиков-теоретиков, инженеров-физиков, специалистов, интересующихся проблемами нелинейной динамики, а также для аспирантов и студентов, приступающих к изучению механики.

УДК 531.3, 534
ББК 22.213

Ответственный редактор
доктор физико-математических наук **И.И. Ляпилин**

Рецензент
доктор физико-математических наук **А.П. Танкеев**



ISBN 978-5-7691-2385-6

© Институт физики металлов УрО
РАН, 2014 г.

© Борисов А.Б., Зверев В.В., 2014 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава 1. Ньютонова механика	9
1.1. Краткий очерк развития механики с древних времен до второго периода античной физики	9
1.2. От периода математической физики в Античности до Леонардо да Винчи	18
1.3. От Николая Коперника до И. Кеплера	33
1.4. От И. Кеплера и Г. Галилея до И. Ньютона	45
1.5. Ньютонова система мира	64
Глава 2. Лагранжева механика	76
2.1. Голономные и неголономные связи	77
2.2. Классификация сил, действующих на тело. Виртуальные перемещения. Идеальные связи	80
2.3. Принцип виртуальных перемещений	84
2.4. Принцип Д'Аламбера. Общее уравнение динамики	87
2.5. Уравнения Лагранжа первого рода	89
2.6. Уравнения Лагранжа второго рода	92
2.7. Вариационное исчисление	98
2.7.1. Подход Эйлера	100
2.7.2. Подход Лагранжа	102
2.8. Построение уравнений механики из принципа наименьшего действия	108
2.9. Законы сохранения	114
2.9.1. Закон сохранения энергии	116
2.9.2. Закон сохранения импульса	118
2.9.3. Центр инерции и уравнения его движения	120
2.9.4. Закон сохранения момента импульса	121
2.9.5. Уравнение движения момента импульса незамкнутой системы	124
2.10. Теорема Нётер	126
Глава 3. Линейные колебания	132
3.1. Свободные колебания системы с одной степенью свободы	132
3.1.1. Гармонические колебания	132
3.1.2. Фазовая плоскость	136
3.2. Затухающие свободные колебания	137
3.2.1. Комплексификация линейных дифференциальных уравнений	138
3.2.2. Логарифмический декремент затухания	140

3.3. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы . . .	143
3.4. Свободные колебания систем со многими степенями свободы . . .	150
3.4.1. Колебания системы с двумя степенями свободы	150
3.4.2. Малые колебания системы из N материальных точек . . .	153
Глава 4. Нелинейные колебания	161
4.1. Нелинейные колебания консервативных систем с одной степенью свободы	164
4.2. Колебания математического маятника. Эллиптические функции .	173
4.3. Малоамплитудные колебания консервативной системы с одной степенью свободы	179
4.3.1. Прямое разложение	180
4.3.2. Метод многих масштабов	183
4.3.3. Метод усреднения. Подход Ван дер Поля	188
4.3.4. Обобщенный метод усреднения. Подход Крылова и Боголюбова	191
4.4. Вынужденные колебания ангармонического осциллятора	194
4.4.1. Прямое разложение	196
4.4.2. Вторичный резонанс $\omega \approx \pm 3$	197
4.4.3. Первичный резонанс. Амплитудно-частотная характеристика	200
4.5. Автоколебания. Предельные циклы	207
4.5.1. Аналитическое решение уравнения Ван дер Поля при малых значениях параметра нелинейности	210
4.5.2. Приближенное решение уравнения Ван дер Поля при больших значениях параметра нелинейности	213
4.5.3. Доказательство существования единственного устойчивого предельного цикла для уравнения Ван дер Поля	217
4.6. Параметрический резонанс	222
4.6.1. Теория Флоке	223
4.6.2. Аналитическое решение уравнения Матье при малых значениях параметра нелинейности	228
4.7. Внешняя синхронизация автоколебательной системы . . .	
Глава 5. Движение в центральном поле	234
5.1. Задача двух тел	234
5.2. Задача Кеплера	235
Глава 6. Гамильтонова механика	246
6.1. Уравнения Гамильтона	246
6.2. Уравнение Гамильтона–Якоби	254
6.3. Теорема Якоби	259
6.4. Скобки Пуассона	262
6.5. Теорема Пуассона	267
6.6. Канонические преобразования	269

6.7. Инфинитезимальные канонические преобразования. Движение как бесконечная совокупность канонических преобразований	278
6.8. Изменение функции при бесконечно малых канонических преобразованиях. Скрытые интегралы движения	281
6.9. Интегральные инварианты Пуанкаре. Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема	282
6.10. Теорема Лиувилля	286
6.11. Переменные действие–угол	
Глава 7. Интегрируемые системы	290
7.1. Уравнения движения твердого тела	290
7.1.1. Углы Эйлера	293
7.1.2. Кинематические уравнения Эйлера	297
7.1.3. Моменты инерции твердого тела	298
7.1.4. Динамические уравнения Эйлера	303
7.1.5. Алгоритм С.В. Ковалевской для интегрирования уравнений движения твердого тела с закрепленной точкой	305
7.2. Свойство Пенлеве дифференциальных уравнений	321
7.2.1. Краткий обзор аналитической теории дифференциальных уравнений	321
7.2.2. Современный алгоритм анализа интегрируемых систем	325
7.2.3. Интегрируемость обобщенной модели Хенона–Хейлеса	332
7.2.4. Построение частных решений нелинейной модели методом линеаризации	337
7.3. Динамика частиц в решетке Тоды. Интегрирование методом обратной задачи рассеяния	340
7.3.1. Представление Лакса	345
7.3.2. Прямая задача рассеяния	350
7.3.3. Метод обратной задачи рассеяния	361
7.3.4. N -солитонные решения	366
7.3.5. Обратная задача рассеяния и задача Римана	376
7.3.6. Солитоны – элементарные возбуждения нелинейных интегрируемых систем	382
7.3.7. Преобразование Дарбу и Бэклунда	386
7.3.8. «Размножение интегрируемых уравнений», модифицированные решетки Тоды	391
Глава 8. Устойчивость движения и структурная устойчивость	423
8.1. Устойчивость движения	423
8.1.1. Устойчивость неподвижных точек и траекторий	423
8.1.2. Отображение последования	429
8.1.3. Теорема об объеме фазовой капли	430
8.1.4. Теорема Пуанкаре–Бендиксона и топология фазовой плоскости	433
8.1.5. Показатели Ляпунова	435

8.2 Структурная устойчивость	444
8.2.1. Топологические перестройки фазового портрета	444
8.2.2. Грубые системы	448
8.2.3. Катастрофа сборки	451
8.2.4. Теория катастроф	463
Глава 9. Хаос в консервативных системах	460
9.1. Детерминизм и необратимость	460
9.2. Простые модели с неустойчивой динамикой	468
9.2.1. Гомоклиническая структура	468
9.2.2. Отображение Аносова	471
9.2.3. Отображение «тент»	473
9.2.4. Сдвиг Бернулли	478
9.3. Динамика гамильтоновых систем, близких к интегрируемым ...	480
9.3.1. Возмущенное движение и нелинейный резонанс	480
9.3.2. Отображение Заславского–Чирикова	485
9.3.3. Хаос и КАМ-теория	488
Глава 10. Хаос и фрактальные аттракторы в диссипативных системах	494
10.1. О природе турбулентности	494
10.2. Динамика модели Лоренца	499
10.3. Элементы канторовской теории множеств	509
10.3.1. Потенциальная и актуальная бесконечность	510
10.3.2. Теорема Кантора и кардинальные числа	515
10.3.3. Канторовские множества	522
10.4. Канторовская структура аттракторов двумерных отображений	526
10.4.1. Отображение Хенона	527
10.4.2. Отображение Икеды	529
10.4.3. Аналитическая теория канторовской структуры аттракторов	530
10.5. Математические модели фрактальных структур	533
10.5.1. Массивное канторовское множество	534
10.5.2. Биномиальный мультипликативный процесс	536
10.5.3. Спектр фрактальных размерностей	542
10.5.4. Ляпуновская размерность	545
10.5.5. Связь показателя массы со спектральной функцией ...	547
10.5.6. Показатель массы мультипликативного биномиального процесса	549
10.5.7. Мультипликативный биномиальный процесс на фрактальном носителе	550
10.5.8. Получение сведений об аттракторе из временной последовательности данных	552
Заключение	557
Список литературы	560