



Д. А. ПОЖАРСКИЙ

**ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ
СТАТИКИ УПРУГОГО КЛИНА И
ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ**

Д.А. ПОЖАРСКИЙ

**ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ
СТАТИКИ УПРУГОГО КЛИНА
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ**

Ростов-на-Дону
ООО «ДГТУ-Принт»
2019

УДК 539.3
ББК 22.251
П 46

Пожарский Д.А. **Фундаментальные решения статики упругого клина и их приложения.** Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ДГТУ-Принт», 2019. 312 с. · ISBN 978-5-6042372-6-7.

Излагаются аналитические методы построения фундаментальных решений статики трехмерного и плоского однородного, составного и непрерывно неоднородного упругого клина. Обобщаются классические фундаментальные решения Буссинеска, Черрути, Миндлина и Кельвина, соответствующие случаям, когда клин разворачивается в полупространство или пространство. Полученные фундаментальные решения используются при исследовании собственно смешанных задач для клина: контактных задач и задач о включениях и разрывах. Рассматриваются численно-аналитические методы решения таких задач при различных граничных условиях и плоских формах областей контакта или разреза. Монография систематизирует и дополняет результаты, полученные в последние десятилетия и разбросанные по различным публикациям, в которых, как правило, отсутствуют подробности построения фундаментальных решений. Приведенные методы могут найти применение также в различных смешанных задачах математической физики. Для специалистов в области теории упругости, механики контактных взаимодействий, механики сплошных сред и математической физики, инженеров, а также аспирантов и студентов механико-математических и физических факультетов университетов.

Analytical methods are given for constructing the fundamental solutions to three-dimensional and plane statics problems for homogeneous, composite and inhomogeneous elastic wedges. The classical Boussinesq, Cerruti, Mindlin and Kelvin solutions are generalized being particular cases when the wedge transforms into a half-space or a full space. The fundamental solutions are used to investigate mixed-mixed problems for the wedges such as contact, crack and inclusion problems. For the mixed-mixed problems analytical and numerical methods are considered for different boundary conditions and various plane contact and crack domains. The monograph systemizes and complements results published last decades in many papers in which, as a rule, there are no details of constructing the fundamental solutions. The methods developed can be also used for different mixed problems of mathematical physics. The book can be useful for specialists in the elasticity theory, contact mechanics, continuum mechanics and mathematical physics, engineers as well as for students and post-graduate students at university departments of mechanics, mathematics and physics.



Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
по проекту № 19-11-00002, не подлежит продаже

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Глава 1. Фундаментальные решения для клина	21
1.1. Общее представление решений для трехмерного клина	23
1.2. Плоская деформация клина	28
1.3. Трехмерный клин из несжимаемого материала	31
1.3.1. Действие нормальной силы	32
1.3.1.1. Одна грань свободна от напряжений	32
1.3.1.2. Одна грань в условиях скользящей заделки	34
1.3.1.3. Одна грань в условиях жесткой заделки	36
1.3.2. Действие касательной силы перпендикулярно ребру	37
1.3.2.1. Одна грань свободна от напряжений	38
1.3.2.2. Одна грань в условиях скользящей заделки	41
1.3.2.3. Одна грань в условиях жесткой заделки	42
1.3.3. Действие касательной силы параллельно ребру	44
1.3.3.1. Одна грань свободна от напряжений	45
1.3.3.2. Одна грань в условиях скользящей заделки	48
1.3.3.3. Одна грань в условиях жесткой заделки	50
1.4. Нагружение грани трехмерного клина из сжимаемого ма- териала	51
1.4.1. Действие нормальных и касательных сил перпендику- лярно ребру	51
1.4.1.1. Одна грань свободна от напряжений	53
1.4.1.2. Одна грань в условиях скользящей заделки	61
1.4.1.3. Одна грань в условиях жесткой заделки	63
1.4.1.4. Анализ интегральных уравнений Фредгольма	71
1.4.1.5. Обобщение задач Буссинеска и Черрути	76
1.4.1.6. Пример: четвертьпространство с одной свободной от напряжений гранью	84
1.4.1.7. Обращение интегральных операторов	86
1.4.1.8. Предельный переход к случаю несжимаемого ма- териала	88
1.4.2. Действие касательной силы параллельно ребру	91

1.4.2.1. Одна грань свободна от напряжений	91
1.4.2.2. Обобщение задачи Черрути	93
1.4.2.3. Одна грань в условиях скользящей заделки	96
1.4.2.4. Одна грань в условиях жесткой заделки	96
1.4.2.5. Переход к несжимаемому материалу	98
1.5. Точечные дислокации в трехмерного клине. Связь между контактными задачами и задачами о разрезах	100
1.5.1. Интегральные уравнения пространственных контакт- ных задач без учета трения для клина	100
1.5.2. Интегральные уравнения задач о плоских разрезах в пространственном клине	101
1.5.2.1. Грани клина свободны от напряжений	102
1.5.2.2. Грани клина в условиях скользящей заделки	110
1.5.2.3. Грани клина в условиях жесткой заделки	111
1.5.2.4. Доказательство теоремы 1	113
1.6. Действие сосредоточенной силы внутри трехмерного клина	114
1.6.1. Действие силы перпендикулярно ребру	115
1.6.1.1. Грани клина свободны от напряжений	116
1.6.1.2. Грани клина в условиях скользящей заделки	117
1.6.1.3. Грани клина в условиях жесткой заделки	117
1.6.1.4. Обобщение решений Миндлина и лорда Кельвина	118
1.6.2. Действие силы параллельно ребру	120
1.6.2.1. Грани клина свободны от напряжений	121
1.6.2.2. Грани клина в условиях скользящей заделки	122
1.6.2.3. Грани клина в условиях жесткой заделки	123
1.6.2.4. Обобщение решений Миндлина и лорда Кельвина	123
Глава 2. Собственно смешанные задачи для пространственного клина	127
2.1. Контактные задачи с учетом сил трения	127
2.1.1. Метод нелинейных ГИУ	130
2.1.2. Численный анализ	133
2.2. Обобщение задачи Галина для клина	142
2.2.1. Постановка задачи	142
2.2.2. Асимптотическое решение	144
2.3. Контактная задача для клиновидного клапана	148
2.4. Контактные задачи для клина с покрытием	154
2.4.1. Постановка задачи	155
2.4.2. Метод решения	158

2.4.3. Численный анализ	160
2.5. Периодическая контактная задача для клина	161
2.5.1. Постановка задачи	162
2.5.2. Асимптотический метод	164
2.5.3. Метод нелинейных ГИУ	168
2.6. Эллиптическая трещина в клине	170
2.6.1. Постановка задач и интегро-дифференциальные уравнения	170
2.6.2. Асимптотический метод	172
2.7. Полосовой разрез в клине	176
2.7.1. Постановка задач и интегральные уравнения	177
2.7.2. Метод парных интегральных уравнений	180
2.8. Периодическая система разрезов в клине	183
2.8.1. Постановка задачи	184
2.8.2. Асимптотический метод	188
2.9. Задача о включении в клине	193
2.9.1. Постановка задачи	193
2.9.2. Асимптотический метод	195
2.9.3. Неединственность и “скрытая” симметрия ядер	201
2.10. Накладка на грани клина, развернутого в полупространство, при жесткой заделке другой грани	205
2.10.1. Постановка задачи	206
2.10.2. Асимптотический метод	209
Глава 3. Задачи для составного и неоднородного клина	211
3.1. Плоские контактные задачи для составного клина	211
3.1.1. Постановка задачи	212
3.1.2. Штамп на вершине клина	216
3.1.3. Асимптотические методы	221
3.2. Плоские контактные задачи для неоднородного клина	225
3.2.1. Общее решение задачи	226
3.2.2. Красная задача	228
3.2.3. Контактная задача. Жесткая заделка	230
3.2.4. Скользящая заделка или отсутствие напряжений	233
3.3. Трехмерная краевая задача для составного клина	238
3.3.1. Постановка краевой задачи	238
3.3.2. Решение краевой задачи	240
3.4. Трехмерные контактные задачи для составного клина, слой под штампом сжимаемый	253

3.4.1. Постановка задач	254
3.4.2. Метод нелинейных ГИУ	257
3.5. Трехмерные контактные задачи с трением для составного клина, слой под штампом несжимаемый	260
3.5.1. Постановка задач	261
3.5.2. Незвистная область контакта	265
3.5.3. Эллиптическая область контакта	266
3.6. Полосовой разрез в составном клине	270
3.6.1. Первый случай составного клина	271
3.6.2. Второй случай составного клина	278
3.7. Периодическая система разрезов в составном клине	283
3.7.1. Постановка и интегральные уравнения задач	283
3.7.2. Асимптотический метод	290
3.7.3. Ряды по произведениям функций Макдональда	295
Список литературы	297