

В.П. Дымников, В.Б. Залесный

ОСНОВЫ  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ  
ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ  
ГИДРОДИНАМИКИ



Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука  
Российской академии наук

**В.П. Дымников, В.Б. Залесный**

**ОСНОВЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ  
ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ**

Москва  
ГЕОС  
2019



УДК 551.513: 556.013: 519.63  
ББК 26.323

Рецензенты:

Доктор физ.-мат. наук, член-корр. РАН *В.Н. Лыкоsov*  
Доктор физ.-мат. наук, профессор РАН *А.А. Корнев*

**Дымников В.П., Залесный В.Б. Основы вычислительной геофизической гидродинамики.** – М.: ГЕОС, 2019. – 448 с.

ISBN 978-5-89118-799-3

В книге последовательно формулируются и изучаются математические модели конкретных динамических процессов, ответственных за формирование крупномасштабной циркуляции атмосферы и океана. Исследуются процессы переноса примесей в атмосфере и океане, нелинейная передача энергии по спектру в квазидвумерном и квазигеострофическом приближениях, динамика крупномасштабных волн и их устойчивость, формирование пограничных струйных течений и т.д. На основе проведенного анализа физических процессов строятся численные алгоритмы решения основных задач динамики атмосферы и океана, включая задачи ассимиляции данных наблюдений в моделях геофизической гидродинамики.

Книга рассчитана на специалистов в области геофизической гидродинамики, вычислительной и прикладной математики, а также студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

Reviewers:

*Lykossov V.N.*, prof., corresponding member of the Russian Academy of Sciences;  
*Kornev A.A.*, prof., Professor of the Russian Academy of Sciences

**Dymnikov V.P., Zalesny V.B. (Valentin P. Dymnikov, Vladimir B. Zalesny) Fundamentals of Computational Geophysical Fluid Dynamics.** – М., GEOS, 2019. 448 p.

The book consistently formulates and studies mathematical models of specific dynamic processes responsible for the formation of large-scale circulation of the atmosphere and ocean. The processes of impurity transfer in the atmosphere and ocean, nonlinear energy transfer over the spectrum in the quasi-two-dimensional and quasi-geostrophic approximations, the large-scale waves dynamics and their stability, the formation of boundary jet flows, etc. are studied. Based on the analysis of physical processes, numerical algorithms for solving the key problems of the atmosphere and ocean dynamics are constructed, including the data assimilation techniques in geophysical fluid dynamics research.

The book is intended for specialists in the field of geophysical fluid dynamics, computational and applied mathematics, as well as students and graduate students of relevant specialties.

Издание осуществлено при финансовой поддержке  
Российского фонда фундаментальных исследований по проекту № 19-15-00019



Издание РФФИ не подлежит продаже

© Дымников В.П., Залесный В.Б., 2019  
© ГЕОС, 2019

# Оглавление

---

---

Предисловие .....	5
Краткая история развития вычислительной геофизической гидродинамики .....	18
<b>Глава 1. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ</b> .....	31
1.1. Некоторые определения и теоремы .....	31
1.2. Разностные методы. Теорема сходимости .....	34
1.3. Проекционно-сеточные методы .....	35
1.4. Метод конечных элементов .....	40
1.5. Метод сферических функций .....	44
1.6. Схемы, основанные на интегральном тождестве Марчука .....	46
1.7. Метод конечных объемов .....	50
1.8. Решение систем линейных алгебраических уравнений .....	52
<b>Глава 2. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ</b> .....	61
2.1. Уравнения гидротермодинамики атмосферы .....	61
2.2. $p$ - и $\sigma$ -системы координат. Законы сохранения .....	64
2.3. Уравнения для потенциального и псевдопотенциального вихря .....	67
2.4. Уравнения динамики океана .....	70
2.5. Эволюционная формулировка задачи в $\sigma$ -системе координат. Закон сохранения полной энергии .....	72
2.6. Параметризация процессов турбулентного обмена в океане .....	77
2.7. О разрешимости задач гидротермодинамики атмосферы .....	83
2.8. О разрешимости задач гидродинамики океана .....	84
<b>Глава 3. ПЕРЕНОС ПРИМЕСЕЙ В АТМОСФЕРЕ И ОКЕАНЕ. МОНОТОННЫЕ СХЕМЫ</b> .....	94
3.1. Уравнения переноса примесей .....	94
3.2. Линейные монотонные схемы для гиперболических уравнений .....	97
3.3. Сильно монотонные схемы .....	102
3.4. Нелинейные монотонные схемы .....	103
3.5. «Квазимонотонные» схемы .....	107
3.6. Уравнения, описывающие локальную трансформацию примесей в атмосфере. Законы сохранения и методы решения .....	111

<b>Глава 4. ДИНАМИКА БАРОТРОПНОЙ НЕВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ</b> .....	116
4.1. Динамика двумерной невязкой несжимаемой атмосферы. Законы сохранения .....	116
4.2. Построение разностных схем, сохраняющих энстрофию, для баротропной атмосферы .....	124
4.3. Построение разностных схем для уравнений баротропной атмосферы, сохраняющих энергию и энстрофию .....	127
4.4. Метод Галеркина для решения уравнений баротропной атмосферы на сфере. Спектрально-сеточное преобразование .....	132
4.5. Метод конечных элементов для решения задачи, описывающей динамику баротропной жидкости в односвязной области .....	139
<b>Глава 5. ДИНАМИКА ДВУМЕРНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ АТМОСФЕРЫ</b> .....	143
5.1. Баротропные волны Россби в атмосфере. Фазовые и групповые скорости .....	143
5.2. Устойчивость волн Россби в баротропной атмосфере .....	145
5.3. Метод Галеркина для решения задачи на собственные значения .....	148
5.4. Аттракторы уравнений двумерной вязкой несжимаемой атмосферы .....	151
5.4.1. <i>Оценки размерности аттракторов</i> .....	151
5.4.2. <i>Методы исследования структуры аттракторов моделей         динамики атмосферы</i> .....	158
5.5. $\varepsilon$ -регуляризация уравнений двумерной атмосферы и операторы отклика на малые внешние воздействия .....	163
<b>Глава 6. ИНЕРЦИОННО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В БАРОКЛИННОЙ АТМОСФЕРЕ</b> .....	168
6.1. Уравнение для инерционно-гравитационных волн. Разложение по собственным функциям вертикального оператора .....	168
6.2. Аппроксимация фазовых и групповых скоростей гравитационных волн на различных пространственных сетках .....	171
6.3. Схема естественного фильтра для уравнений, описывающих инерционно-гравитационные волны .....	177
<b>Глава 7. БАРОКЛИННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ АТМОСФЕРЫ</b> .....	181
7.1. Бароклидная неустойчивость зонально симметричных атмосферных потоков .....	181
7.2. Априорные оценки аппроксимации дискретного спектра в задаче Иди для класса разностных схем .....	186
7.3. Аппроксимация вертикальных профилей неустойчивых мод в задаче бароклидной неустойчивости зонально симметричного потока .....	189

<b>Глава 8. О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОГИДРОДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ</b> .....	192
8.1. Аппроксимация по вертикали и законы сохранения.....	192
8.2. Воспроизведение силы градиента давления над орографически неоднородной поверхностью Земли в $\sigma$ -системе координат.....	196
8.3. Вертикальное распространение волновой энергии.....	197
<b>Глава 9. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИДРОТЕРМОДИНАМИКИ</b> .....	202
9.1. Явные и неявные схемы.....	202
9.2. Методы расщепления.....	208
9.3. Полуявные схемы решения уравнений динамики атмосферы.....	222
<b>Глава 10. МЕТОД СОПРЯЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ</b> .....	226
10.1. Сопряженные уравнения для нестационарных задач .....	226
10.2. Метод сопряженных уравнений для линейных задач геофизической гидродинамики. Задачи апостериорного анализа решения .....	229
10.3. Сопряженные уравнения и простейшие обратные задачи .....	234
10.4. Формирование осредненного по времени волнового отклика атмосферы на удаленное внешнее возмущение .....	239
10.5. Оценка роли динамики океана в формировании температурных аномалий верхнего деятельного слоя .....	242
<b>Глава 11. ДИНАМИКА ПЛАНЕТАРНЫХ БАРОТРОПНЫХ ВОЛН В ОКЕАНЕ</b> .....	246
11.1. Постановка задачи динамики баротропного океана .....	246
11.2. Баротропная динамика в замкнутом бассейне. Спектр планетарных волн .....	250
11.3. Конечно-разностные аппроксимации линейной задачи .....	253
11.4. Решение линейной краевой задачи для функции тока с помощью метода конечных элементов .....	259
11.5. Решение краевой задачи для баротропных волн Россби в океане с переменным рельефом дна .....	266
<b>Глава 12. КРУПНОМАСШТАБНЫЕ ИНЕРЦИОННО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В БАРОТРОПНОМ ОКЕАНЕ</b> .....	272
12.1. Численная модель динамики баротропного океана в приближении мелкой воды .....	272
12.2. Характерные масштабы инерционно – гравитационных волн в океане .....	275
12.3. Краевые задачи для линейных уравнений мелкой воды .....	278

12.4. Численное решение уравнений мелкой воды .....	284
12.5. Решение уравнений мелкой воды на неструктурированных сетках.....	288

### **Глава 13. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ О БАРОТРОПНОЙ**

<b>ЦИРКУЛЯЦИИ В ОКЕАНЕ .....</b>	<b>296</b>
13.1. Задача о стационарной циркуляции в океане .....	296
13.2. Решение краевых задач с пограничным слоем .....	300
13.3. Проекционно-разностные схемы для решения нестационарной нелинейной задачи для функции тока .....	306

### **Глава 14. ДИНАМИКА СТРАТИФИЦИРОВАННОГО ОКЕАНА.....**

14.1. Уравнения динамики стратифицированного океана. Законы сохранения .....	312
14.2. Метод решения уравнений динамики стратифицированного океана, основанный на выделении плоского движения .....	316
14.3. Уравнения динамики стратифицированного океана с верхней подвижной границей .....	318
14.4. Вертикальная структура циркуляции в стратифицированном океане с плоским дном. Задача о малых колебаниях устойчиво стратифицированного океана .....	320
14.5. Вычислительные аспекты воспроизведения пространственной структуры экваториальной динамики океана .....	327

### **Глава 15. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЩЕЙ ЦИРКУЛЯЦИИ ОКЕАНА .....**

15.1. Метод расщепления по физическим процессам как методологическая основа построения моделирующей системы .....	339
15.2. Постановка задачи крупномасштабной циркуляции океана .....	344
15.3. Эволюционная формулировка задачи в $\sigma$ -системе координат. Закон сохранения полной энергии .....	345
15.4. Постановка задачи крупномасштабной циркуляции океана с учетом турбулентной диссипации и диффузии .....	348
15.5. Расщепление системы уравнений по физическим процессам .....	352
15.6. Параметризация процессов вертикального турбулентного обмена в рамках локальных $(k-\varepsilon)$ и $(k-\omega)$ моделей.....	354
15.7. Метод расщепления для решения $(k-\varepsilon)$ и $(k-\omega)$ уравнений турбулентности.....	358

### **Глава 16. ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ НЕГИДРОСТАТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ ОКЕАНА .....**

16.1. Задачи динамики несжимаемой жидкости .....	364
16.2. Постановка задачи в сигма- системе координат и закон сохранения.....	367

16.3. Метод многокомпонентного расщепления.....	369
16.4. Выделение среднего по вертикали движения и приведение задачи к эволюционной форме .....	371
16.5. Неявная схема решения уравнений негидростатической динамики .....	373
16.6. Метод искусственной сжимаемости и расщепление уравнений негидростатической динамики .....	374

<b>Глава 17. АССИМИЛЯЦИЯ ДАННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ В МОДЕЛЯХ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ .....</b>	<b>377</b>
17.1. Системы моделирования и данные наблюдений.....	377
17.2. Метод наименьших квадратов.....	379
17.3. Практическое применение метода наименьших квадратов.....	384
17.4. Фильтр Калмана.....	390

<b>Глава 18. МЕТОД ВАРИАЦИОННОЙ АССИМИЛЯЦИИ ДАННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ .....</b>	<b>397</b>
18.1. Метод четырехмерной вариационной ассимиляции данных .....	398
18.2. Задача вариационной ассимиляции данных для эволюционного уравнения.....	400
18.3. Численный метод решения эволюционной задачи вариационной ассимиляции данных .....	403
18.4. Алгоритмы решения вариационной задачи и свойства результирующей системы оптимальности.....	409
18.5. Эффекты аппроксимации по времени .....	416
18.6. Алгоритм решения вариационной задачи четырехмерной ассимиляции данных на основе метода расщепления .....	420
18.7. Вариационная ассимиляция полей температуры и солёности в океане.....	422
18.8. Решение задачи четырехмерной ассимиляции данных для уравнения переноса-диффузии температуры на основе метода расщепления.....	425

<b>Глава 19. МЕТОДЫ ДИАГНОЗА АТМОСФЕРНОЙ И ОКЕАНИЧЕСКОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ ПО ДАННЫМ НАБЛЮДЕНИЙ И МОДЕЛИРОВАНИЯ .....</b>	<b>432</b>
19.1. Метод разложения полей по естественным ортогональным базисам .....	432
19.2. Метод сингулярного разложения ковариационной матрицы (SVD-анализ) .....	436
19.3. Канонический корреляционный анализ .....	437
19.4. Комплексные (гильбертовы) естественные ортогональные векторы .....	439