

Н. Г. Марчук, Д. С. Широков

---

**ТЕОРИЯ  
АЛГЕБР  
КЛИФФОРДА  
И СПИНОРОВ**



**Н. Г. Марчук  
Д. С. Широков**

**ТЕОРИЯ  
АЛГЕБР КЛИФФОРДА  
И СПИНОРОВ**



**URSS**

**МОСКВА**

ББК 22.145 22.311 22.312 22.313 22.315



*Настоящее издание осуществлено при финансовой поддержке  
Российского фонда фундаментальных исследований  
(проект № 20–11–00009), не подлежит продаже*

**Марчук Николай Гурьевич,  
Широков Дмитрий Сергеевич**

**Теория алгебр Клиффорда и спиноров.** — М.: КРАСАНД, 2020. — 560 с.

В книге излагается ряд актуальных разделов теории алгебр Клиффорда. Алгебры Клиффорда применяются во многих разделах современной математики, физики, механики, инженерии, обработке сигналов и др. В книге подробно излагается теория представлений алгебр Клиффорда. Детально разбираются вопросы связи спинорных и ортогональных групп, теорема Паули. Развивается метод кватернионной типизации элементов алгебр Клиффорда. Рассматриваются связи с унитарными, псевдоунитарными и симплектическими группами Ли, а также теория спиноров, которая важна для математической и теоретической физики. Для специалистов в области математической и теоретической физики, аспирантов и студентов математического и физического направления.

### **Theory of Clifford algebras and spinors**

The book deals with several actual branches of Clifford algebra theory. Clifford algebras are used in mathematics, physics, mechanics, engineering, signal processing, etc. We discuss in details a representation theory of Clifford algebras. Also we discuss the connection between spin and orthogonal groups, Pauli theorem. We develop a method of quaternion typification of Clifford algebra elements. We consider relations with unitary, pseudo-unitary and symplectic Lie groups. We consider theory of spinors, which is important for mathematical and theoretical physics.

Издательство «КРАСАНД». 117335, Москва, Нахимовский пр-т, 56.  
Формат 60×90/16. Тираж 300 экз. Печ. л. 35. Подписано в печать 06.10.2020.

Отпечатано в полном соответствии с качеством  
предоставленного электронного оригинал-макета  
в АО «Областная типография «Печатный двор»  
432049, г. Ульяновск, ул. Пушкирева, 27.

**ISBN 978–5–396–01014–7**

© КРАСАНД, 2020

27157 ID 263794



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

# Оглавление

От авторов . . . . .	11
Предисловие . . . . .	13
Список обозначений . . . . .	21
<b>Часть I</b>	
<b>Алгебры Клиффорда и смежные структуры . . .</b>	<b>25</b>
<b>Глава 1. Алгебра матриц Дирака . . . . .</b>	<b>29</b>
1.1. $\gamma$ -матрицы Дирака . . . . .	29
1.2. Связь $\gamma$ -матриц с псевдоунитарной группой . . . . .	34
<b>Глава 2. Алгебра Клиффорда <math>\mathbb{C} \otimes \mathcal{A}_{1,3}</math> . . . . .</b>	<b>39</b>
2.1. Алгебры Клиффорда $\mathcal{A}_{1,3}$ и $\mathbb{C} \otimes \mathcal{A}_{1,3}$ . . . . .	39
2.2. Структуры, связанные с элементами алгебры Клиффорда . . . . .	41
2.3. Внешнее умножение элементов алгебры Клиффорда . . . . .	44
2.4. Эрмитово сопряжение и скалярное произведение в $\mathbb{C} \otimes \mathcal{A}_{1,3}$ . . . . .	46
2.5. Другие операции сопряжения . . . . .	49
2.6. Эрмитовы идемпотенты и идеалы . . . . .	52
2.7. Матричные представления алгебры $\mathbb{C} \otimes \mathcal{A}_{1,3}$ . . . . .	55
2.8. Другие матричные представления алгебры $\mathbb{C} \otimes \mathcal{A}_{1,3}$ . . . . .	58
2.9. Вторичные порождающие алгебры $\mathbb{C} \otimes \mathcal{A}_{1,3}$ . . . . .	61
2.10. Простейшие операции над элементами алгебры $\mathbb{C} \otimes \mathcal{A}_{1,3}$ . . . . .	62
<b>Глава 3. Алгебры Клиффорда <math>\mathcal{A}_{p,q}</math> и <math>\mathbb{C} \otimes \mathcal{A}_{p,q}</math> . . . . .</b>	<b>69</b>
3.1. Определение алгебр Клиффорда с фиксированным базисом . . . . .	69
3.2. О комплексифицированных и комплексных алгебрах Клиффорда . . . . .	71

3.3.	Примеры алгебр Клиффорда малых размерностей . . . . .	73
3.4.	Другие определения алгебр Клиффорда . . . . .	75
3.5.	Классификации элементов алгебр Клиффорда по рангам, четности и кватернионным типам . . . . .	77
3.6.	Операторы сопряжения . . . . .	79
3.7.	Структура унитарного (или евклидова) пространства на алгебре Клиффорда . . . . .	83
<b>Глава 4.</b>	<b>Матричные представления алгебр Клиффорда . . . . .</b>	<b>91</b>
4.1.	Матричные представления алгебр Клиффорда, примеры . . . . .	92
4.2.	Эрмитовы идемпотенты, левые идеалы и смежные структуры . . . . .	95
4.3.	Нормальные представления алгебр Клиффорда в виде комплексных матриц . . . . .	99
4.4.	Примеры матричных представлений алгебр Клиффорда . . . . .	106
4.5.	Рекуррентный метод построения матричного представления комплексифицированных алгебр Клиффорда . . . . .	109
4.6.	Периодичность Картана—Ботта и матричные представления вещественных алгебр Клиффорда . . . . .	111
4.7.	Внешняя сигнатура алгебр Клиффорда . . . . .	116
4.8.	Рекуррентный метод построения матричного представления вещественных алгебр Клиффорда . . . . .	119
 <b>Часть II</b>		
<b>Метод кватернионной типизации . . . . .</b>		<b>123</b>
<b>Глава 5.</b>	<b>Коммутаторы и антикоммутаторы в алгебрах Клиффорда . . . . .</b>	<b>127</b>
5.1.	Центр алгебр Клиффорда . . . . .	127
5.2.	Формулы для коммутаторов и антикоммутаторов от элементов алгебры Клиффорда фиксированных рангов . . . . .	130
5.3.	Некоторые частные случаи формул для коммутаторов и антикоммутаторов . . . . .	133
5.4.	Определения подпространств фиксированных рангов алгебры Клиффорда . . . . .	142
5.5.	Решение коммутаторных уравнений . . . . .	143

<b>Глава 6. Кватернионная типизация алгебр Клиффорда . . . . .</b>	<b>153</b>
6.1. Алгебры кватернионного типа . . . . .	153
6.2. Основы кватернионной типизации элементов алгебры Клиффорда . . . . .	158
6.3. Кватернионная типизация алгебр Клиффорда в бескоординатной форме . . . . .	166
6.4. Размерности подпространств кватернионных типов . . . . .	169
<b>Глава 7. Развитие метода кватернионной типизации . . . . .</b>	<b>173</b>
7.1. Подалгебры в виде подпространств из элементов фиксированных кватернионных типов . . . . .	173
7.2. Классификация подалгебр алгебры Ли псевдоунитарной группы алгебры Клиффорда . . . . .	176
7.3. Тройные коммутаторы и антикоммутаторы в алгебрах Клиффорда . . . . .	181
7.4. Развитие метода кватернионной типизации с помощью $k$ -мерных коммутаторов и антикоммутаторов . . . . .	184
7.5. Сопряжения и метод кватернионной типизации . . . . .	189
<b>Глава 8. Алгебры Грассмана и кватернионные типы . . . . .</b>	<b>199</b>
8.1. Определение алгебры Грассмана . . . . .	199
8.2. Классификации элементов алгебр Грассмана по рангам, четности и кватернионным типам . . . . .	200
8.3. Формулы для коммутаторов и антикоммутаторов от элементов алгебры Грассмана . . . . .	202
8.4. Внешнее умножение элементов алгебр Клиффорда . . . . .	203
8.5. Клиффордово умножение элементов алгебры Грассмана . . . . .	205
8.6. Алгебра Грассмана как алгебра кватернионного типа . . . . .	206
8.7. $k$ -мерные коммутаторы и антикоммутаторы в алгебре Грассмана . . . . .	207
<b>Часть III</b>	
<b>Метод усреднения в алгебрах Клиффорда и обобщенная теорема Паули . . . . .</b>	
<b>213</b>	
<b>Глава 9. Свертки по наборам элементов базиса алгебры Клиффорда . . . . .</b>	<b>217</b>
9.1. Теорема о свертке порождающих . . . . .	219
9.2. Теорема о свертке элементов базиса фиксированного ранга . . . . .	222
9.3. Частные случаи теоремы о свертке . . . . .	224

9.4.	Полные свертки . . . . .	225
9.5.	Свертки по четным или нечетным элементам базиса . . . . .	228
9.6.	Свертки по сопряженным наборам элементов базиса . . . . .	229
9.7.	Свертки по элементам базиса фиксированного кватернионного типа . . . . .	233
<b>Глава 10. Обобщенные свертки в алгебрах Клиффорда . . . . .</b>		<b>241</b>
10.1.	Теоремы о коммутировании элементов базиса алгебры Клиффорда . . . . .	241
10.2.	Второй базис в алгебрах Клиффорда . . . . .	247
10.3.	Обобщенные свертки . . . . .	257
10.4.	Обобщенные свертки по четным и нечетным индексам . . . . .	264
10.5.	Обобщенные свертки по сопряженным наборам мультииндексов в нечетной алгебре Клиффорда . . . . .	266
<b>Глава 11. Теорема Паули и ее обобщения на случай алгебр Клиффорда . . . . .</b>		<b>275</b>
11.1.	Теорема Паули в случае $n = 4$ . . . . .	276
11.2.	Обобщенная теорема Паули в алгебрах Клиффорда с четным $n$ в общей постановке . . . . .	277
11.3.	Обобщенная теорема Паули в алгебрах Клиффорда с четным $n$ для нечетных элементов . . . . .	282
11.4.	Обобщенная теорема Паули в алгебрах Клиффорда с нечетным $n$ для нечетных элементов . . . . .	285
11.5.	Обобщенная теорема Паули в алгебрах Клиффорда с нечетным $n$ в общей постановке . . . . .	290
11.6.	Локальная обобщенная теорема Паули . . . . .	301
<b>Глава 12. Связь обобщенной теоремы Паули с теорией представлений . . . . .</b>		<b>309</b>
12.1.	Основы теории представлений, лемма Шура . . . . .	309
12.2.	Метод усреднения в теории представлений конечных групп . . . . .	312
12.3.	Неприводимые представления алгебр Клиффорда . . . . .	317
12.4.	Алгебраический взгляд на классификацию алгебр Клиффорда . . . . .	320
12.5.	Обобщенная теорема Паули в терминах матриц . . . . .	323
12.6.	Операция взятия следа от элемента алгебры Клиффорда . . . . .	328
12.7.	Определитель от элемента комплексифицированной алгебры Клиффорда . . . . .	332

**Часть IV****Группы Ли и алгебры Ли****в алгебрах Клиффорда . . . . . 339****Глава 13. Ортогональные группы . . . . . 343**13.1. Псевдоортогональная и специальная  
псевдоортогональная группа . . . . . 34313.2. Некоторые соотношения для элементов  
псевдоортогональной группы . . . . . 34613.3. Ортохронная, ортохорная  
и специальная ортохронная группы . . . . . 351

13.4. Ортогональные группы и алгебры Клиффорда . . . . . 354

13.5. Структура ортогональных групп . . . . . 359

**Глава 14. Спинорные группы и их связь  
с ортогональными . . . . . 367**14.1. Группа обратимых элементов алгебры Клиффорда,  
присоединенные действия . . . . . 36714.2. Применение обобщенной теоремы Паули при изучении  
группы Липшица и группы Клиффорда . . . . . 37014.3. Спинорные группы как нормализованные подгруппы  
группы Липшица . . . . . 374

14.4. Теоремы о норме элементов спинорных групп . . . . . 378

14.5. Сюръективные отображения спинорных групп  
на ортогональные . . . . . 38314.6. Вычисление элементов спинорных групп  
по элементам ортогональных групп . . . . . 389**Глава 15. Дальнейшее исследование спинорных групп . 393**15.1. Отражения относительно гиперплоскостей  
и теорема Картана—Дьедонне . . . . . 393

15.2. Другой подход к исследованию группы Липшица . . . . . 395

15.3. Явный вид элементов группы Клиффорда,  
группы Липшица и спинорных групп . . . . . 398

15.4. Случай евклидовых сигнатур . . . . . 400

15.5. Структура спинорных групп . . . . . 403

15.6. Спинорные группы в случае малых размерностей . . . . . 408



<b>Глава 16. Спинорные группы как группы Ли</b> . . . . .	<b>417</b>
16.1. Алгебры Ли спинорных групп . . . . .	417
16.2. Двулистные накрытия ортогональных групп спинорными, связность и односвязность спинорных групп . . . . .	419
16.3. Экспонента от элементов второго ранга алгебры $\mathcal{C}_{1,3}$ . .	422
16.4. Внешние экспоненты от элементов алгебры Клиффорда . . . . .	425
16.5. Внешняя экспонента от элементов второго ранга алгебры $\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}_{1,3}$ . . . . .	427
16.6. Множество $\mathcal{C}_{1,3}^{\text{EOO}}$ и амплитуда . . . . .	433
<b>Глава 17. Унитарные и псевдоунитарные группы Ли     в алгебрах Клиффорда</b> . . . . .	<b>441</b>
17.1. Унитарные группы алгебры Клиффорда . . . . .	441
17.2. Псевдоунитарные группы алгебры Клиффорда . . . . .	443
17.3. Симплектическая подгруппа псевдоунитарной группы $W\mathcal{C}_{1,3}^{\mathbb{C}}$ . . . . .	445
17.4. Унитарные подгруппы псевдоунитарных, симплектических и спинорных групп алгебры Клиффорда $\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}_{1,3}$ . . . . .	448
17.5. Алгебры Ли унитарных подгрупп псевдоунитарных групп алгебры Клиффорда $\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}_{1,n-1}$ . . . . .	453
<b>Глава 18. Спиноры</b> . . . . .	<b>461</b>
18.1. Спиноры Дирака и Вейля в формализме алгебр Клиффорда . . . . .	461
18.2. Согласованность матричных операций и операций в алгебрах Клиффорда . . . . .	463
18.3. Дополнительные сигнатуры алгебр Клиффорда . . . . .	465
18.4. Обобщение дираковского сопряжения . . . . .	468
18.5. Обобщение майорановского сопряжения и теорема о дополнительной сигнатуре алгебры Клиффорда . . . . .	469
18.6. Обобщение зарядового сопряжения, спиноры Майорана и Майорана–Вейля в формализме алгебр Клиффорда . . . . .	474
<b>Приложения</b> . . . . .	<b>479</b>
<b>Глава 19. Некоторые основные     алгебраические понятия</b> . . . . .	<b>483</b>
19.1. Элементы теории множеств . . . . .	483
19.2. Отображения . . . . .	484

---

19.3. Группы . . . . .	486
19.4. Кольца, тела, поля . . . . .	488
19.5. Модули, векторные пространства . . . . .	489
19.6. Билинейные и квадратичные функции на векторном пространстве . . . . .	490
19.7. Алгебры . . . . .	491
<b>Глава 20. Некоторые геометрические понятия . . . . .</b>	<b>495</b>
20.1. Евклидово пространство . . . . .	495
20.2. Псевдоевклидово, унитарное и симплектическое пространства . . . . .	497
20.3. Метрическое пространство . . . . .	499
20.4. Топологическое пространство, многообразие . . . . .	499
20.5. Линейная связность, фундаментальная группа, односвязность . . . . .	501
20.6. Накрытия . . . . .	502
20.7. Группы Ли и алгебры Ли . . . . .	503
20.8. Классические матричные группы . . . . .	504
<b>Глава 21. Некоторые обобщения алгебр Клиффорда . . . . .</b>	<b>513</b>
21.1. Обобщенные алгебры Клиффорда третьего и высших порядков . . . . .	514
21.2. Демонстрационное представление и тензорные произведения алгебр Клиффорда . . . . .	516
21.3. Классификация расширенных алгебр Клиффорда . . . . .	528
21.4. Внешние полиметрические алгебры . . . . .	534
<b>Литература . . . . .</b>	<b>543</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>549</b>