



1797

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМ. А. И. ГЕРЦЕНА

А. В. Флегонтов

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

СТРУКТУРНО-ИНВАРИАНТНЫЙ  
ПОДХОД



**А. В. ФЛЕГОНТОВ**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ:  
СТРУКТУРНО-ИНВАРИАНТНЫЙ ПОДХОД**

*Монография*

**Санкт-Петербург**

**Издательство РГПУ им. А. И. Герцена**

**2022**



*Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту № 21-11-00011, не подлежит продаже*

## Рецензенты:

*С. Н. Андрианов, доктор физико-математических наук, профессор (СПбГУ);*

*В. В. Фомин, доктор технических наук, профессор (РГПУ им. А. И. Герцена)*

Ф71 **Флегонтов А. В.** Моделирование динамических систем: структурно-инвариантный подход : монография / А. В. Флегонтов (РГПУ им. А. И. Герцена). — Санкт-Петербург : Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2022. — 216 с.

ISBN 978-5-8064-3145-6

В книге в сжатой форме изложены основные подходы и методы инвариантного анализа и синтеза математических моделей с симметриями. Рассматриваются элементы теории инвариантов, теории групп Ли, поиска групп эквивалентности.

Для задач структурного синтеза математических моделей в форме дифференциальных уравнений с априорной симметрией, так же как и для задач анализа симметричной структуры уравнений, наравне с лиевским (классическим) и дискретно-групповым анализом дифференциальных уравнений используется техника интегральных многообразий. При этом рассматривается не только отдельное уравнение, инвариантное к определенной группе симметрий, но и класс уравнений, связанных дискретной симметрией, а также дифференциальный комплекс уравнений разных порядков, базирующихся на одном многообразии.

Рассматриваются алгоритмы и программы аналитических вычислений для разработанных методов. Рассматриваются многочисленные примеры и задачи от простейших алгебро-геометрических до сложных уравнений математической физики.

Книга предназначена для студентов, преподавателей и научно-технических работников, интересующихся математическим моделированием.

**Flegontov A. V.** Modeling of dynamic systems: structure-invariant approach : monograph. — Saint Petersburg : Publishing House of the Herzen State Pedagogical University of Russia, 2022. — 216 p.

The book briefly describes the main approaches and methods of invariant analysis and synthesis of mathematical models with symmetries. Elements of invariant theory, Lie group theory, and the search for equivalence groups are considered.

For problems of structural synthesis of mathematical models in the form of differential equations with a priori symmetry, as well as for problems of analysis of the symmetric structure of equations, along with the Lie (classical) and discrete-group analysis of differential equations, the technique of integral manifolds is used. In this case, we consider not only a separate equation invariant to a certain group of symmetries, but also a class of equations connected by discrete symmetry, as well as a differential complex of equations of different orders based on a single manifold.

Algorithms and programs of analytical calculations for the developed methods are considered. Numerous examples and problems from the simplest algebra-geometric to complex equations of mathematical physics are considered.

The book is intended for students, teachers and scientific and technical workers interested in mathematical modeling.

ББК 22.1.021

ISBN 978-5-8064-3145-6

© А. В. Флегонтов, 2022

© С. В. Лебединский, дизайн обложки, 2022

© РГПУ им. А. И. Герцена, 2022

## Оглавление

Введение .....	3
Глава I. Задачи симметричного анализа и синтеза .....	13
1.1. Основные понятия, определения и задачи современного группового анализа .....	13
1.2. Обратные задачи .....	28
1.3. Алгоритмы основных методов. Общее описание .....	32
1.4. Обзор методов и компьютерных систем для аналитических преобразований.....	38
Глава II. Методы и математические модели структурного синтеза .....	47
2.1. Аналитические методы. Формальные полиномы .....	49
2.2. Формальные интегральные многообразия.....	61
2.3. Дифференциальные комплексы .....	69
Глава III. Структурный синтез нелинейных моделей и симметрии .....	77
3.1. Голоморфные структуры .....	77
3.1.1. Системы типа Брю и Буке .....	77
3.1.2. Системы полиномиального типа.....	80
3.2. Сингулярные структуры с дискретной симметрией.....	93
3.3. Обратимые управляемые системы.....	97
3.4. Экологические и эколого-экономические модели .....	106
3.5. Применение метода дифференциальных «пазлов».....	109
3.5.1. Дифференциальная алгебра полиномов.....	110
3.5.2. Дифференциальная алгебра функций Вейерштрасса .....	119
3.6. Применение метода дифференциальных связей .....	129
Глава IV. Компьютерные вычисления и алгебраические алгоритмы.....	132
4.1. Основы алгебраических алгоритмов .....	132
4.2. Полиномиальная алгебра .....	139
4.2.1. Факторизация .....	139
4.2.2. Алгебраический анализ полиномов.....	141
4.3. Символьные вычисления для дифференциальных уравнений .....	143
4.4. Построение бифуркационных диаграмм некоторых классов нелинейных краевых задач.....	156

Глава V. Информационная поддержка, интеллектуальные справочные системы (ретроспектива) .....	169
5.1. Математические нотации в Интернете .....	170
5.2. Конвертирование математических выражений .....	173
5.3. Структура математических ИС .....	176
5.4. Интеллектуальные поисковые системы .....	182
5.5. Применение графических пакетов в ДГА.....	195
Литература .....	199