

Р. П. Кузьмина

# ГИРОСКОП В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ



**Кузьмина Р. П.**

К89 Гироскоп в кардановом подвесе / Р. П. Кузьмина. — Москва :  
Университетская книга, 2012. — 202 с. : табл., ил.

ISBN 978-5-91304-299-6

В книге исследуются уравнения движения гироскопа в кардановом подвесе. Рассматривается классический случай, когда в осях подвеса нет трения, и случай, когда в осях подвеса есть вязкое трение. В первом случае изучаются все движения гироскопа, в том числе и медленные. Во втором случае уравнения движения гироскопа приводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям с малым параметром, и к ним применяются асимптотические методы исследования.

Книга предназначена тем, кто изучает теоретическую механику, и тем, кто осваивает методы исследования обыкновенных дифференциальных уравнений.

УДК 531.011

ББК 22.21

Научное издание

**Раиса Петровна Кузьмина**

**ГИРОСКОП В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ**

*Издание печатается с авторской редактуры и версткой.*

Подп. в печать 14.11.2012. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.  
Печать цифровая. Усл. печ. л. 11,74. Тираж 100 экз. Заказ №

## Оглавление

<b>Предисловие</b> .....	9
<b>Глава 1. Движение классического гироскопа в кардановом подвесе</b> .....	11
§1. Уравнения движения и первые интегралы .....	11
1.1. Физическая модель гироскопа в кардановом подвесе .....	11
1.2. Математическая модель движения гироскопа в кардановом подвесе .....	12
1.3. Первые интегралы .....	12
§2. Нулевая энергия .....	13
§3. Угловые скорости .....	14
§4. Частные случаи движения.....	16
§5. Фазовые траектории .....	18
§6. Бифуркационное множество .....	22
§7. Регулярная прецессия .....	25
§8. Теоремы о регулярной прецессии .....	26
§9. Устойчивые и неустойчивые регулярные прецессии .....	29
§10. Область 1 .....	36
10.1. Фазовые траектории .....	36
10.2. Нутационные колебания .....	36
10.3. Движение внешнего кольца .....	38
10.4. Средняя скорость ухода гироскопа .....	43
10.5. Сравнение с формулой Магнуса .....	45
§11. Область 2 .....	47

§12. Область 3 .....	49
12.1. Фазовая траектория .....	49
12.2. Нутационные колебания .....	50
12.3. Движение внешнего кольца .....	51
§13. Область 4 .....	55
13.1. Движение внутреннего кольца .....	55
13.2. Движение внешнего кольца .....	56
§14. Область 5 .....	57
14.1. Движение внутреннего кольца .....	57
14.2. Движение внешнего кольца .....	58
§15. Границы между областями .....	59
§16. Граничные точки .....	64
§17. Выводы главы 1 .....	68
<b>Глава 2. Движение ещё одного гироскопа</b>	
<b>в кардановом подвесе .....</b>	<b>71</b>
§18. Приведение к сингулярно возмущённой задаче Коши .....	71
18.1 Математическая модель движения гироскопа в кардановом подвесе .....	71
18.2. Введение малого параметра .....	72
18.3. Прецессионная модель движения гироскопа в кардановом подвесе .....	75
18.4. Результаты .....	76
§19. Применение метода пограничных функций .....	77
19.1. Построение асимптотического решения .....	77
19.2. Проверка условий теорем 30.1–30.3 .....	82

19.3. Применение теорем 30.1–30.3 .....	85
19.4. Применение теоремы 30.4 .....	86
19.5. Оценка остаточного члена и интервала времени .....	89
19.6. Результаты .....	99
§20. Модификация метода пограничных функций .....	100
20.1. Построение асимптотического решения .....	100
20.2. Оценка остаточного члена и интервала времени .....	104
20.3. Результаты .....	113
§21. Применение метода двух параметров .....	114
21.1. Применение теорем 31.2, 31.3 .....	114
21.2. Построение асимптотического решения .....	115
21.3. Применение теорем 31.4, 31.5 .....	117
21.4. Применение теоремы 31.6 .....	118
21.5. Оценка остаточного члена и интервала времени .....	119
§22. Модификация метода двух параметров .....	120
22.1. Построение асимптотического решения .....	120
22.2. Оценка остаточного члена и интервала времени .....	121
§23. Применение второго метода Ляпунова .....	122
23.1. Введение функции Ляпунова .....	122
23.2. Применение теоремы 30.5 .....	122
23.3. Существование решения на полуоси $t \geq 0$ .....	123
23.4. Результаты .....	124
§24. Соединение метода пограничных функций и метода двух параметров со вторым методом Ляпунова .....	125

24.1. Оценка остаточного члена на полуоси $t \geq 0$ .....	125
24.2. Результаты .....	130
§25. Движение гироскопа в кардановом подвесе и регулярно возмущённая задача Коши .....	130
25.1. Проверка условий теорем 32.1, 32.2 .....	130
25.2. Применение теорем 32.1, 32.2 .....	133
25.3. Асимптотическое решение .....	134
25.4. Результаты .....	134
§26. Выводы главы 2 .....	135
<b>Дополнение</b> .....	137
§27. Построение математической модели движения гироскопа в кардановом подвесе с использованием кинетического момента .....	137
27.1. Кинематические соотношения .....	137
27.2. Моменты инерции .....	140
27.3. Кинетические моменты .....	141
27.4. Теорема об изменении кинетического момента .....	145
27.5. Математическая модель движения гироскопа в кардановом подвесе при наличии вязкого трения .....	148
§28. Построение математической модели движения гироскопа в кардановом подвесе с использованием функции Лагранжа .....	149
28.1. Функция Лагранжа .....	149
28.2. Уравнения Лагранжа второго рода .....	152

28.3. Идеальные связи .....	152
28.4. Уравнения Лагранжа второго рода при идеальных связях .....	155
28.5. Уравнения Лагранжа второго рода при наличии диссипативных сил .....	156
§29. Введение малого параметра .....	159
29.1. Исходные уравнения .....	159
29.2. Нормализация размерных переменных .....	159
29.3. Переход к безразмерным параметрам .....	160
29.4. Нормализация безразмерных параметров .....	161
§30. Метод пограничных функций .....	162
30.1. Определение задачи Тихонова .....	162
30.2. Построение асимптотического решения методом пограничных функций .....	163
30.3. Порядок вычисления коэффициентов асимптотики	167
30.4. Условия, налагаемые на сингулярные уравнения .....	170
30.5. Теоремы о решении сингулярно возмущённой задачи Коши .....	174
30.6. Об асимптотическом решении .....	176
30.7. Оценка остаточного члена, интервала времени, значений малого параметра .....	178
30.8. Второй метод Ляпунова .....	181
30.9. Замечания .....	183
§31. Метод двух параметров .....	183
31.1. Регулярно возмущённая задача Коши .....	183

31.2. Построение асимптотического решения методом двух параметров .....	186
31.3. Теоремы о точном решении сингулярно возмущённой задачи Коши .....	188
31.4. Теоремы об асимптотическом решении сингулярно возмущённой задачи Коши .....	189
31.5. Теорема о точном решении при фиксированном значении $\mu$ .....	190
31.6. Замечания .....	191
§32. Задача Тихонова и регулярно возмущённая задача Коши .....	192
§33. Выводы Дополнения .....	195
<b>Литература .....</b>	<b>196</b>
<b>Именной указатель .....</b>	<b>198</b>
<b>Предметный указатель .....</b>	<b>199</b>