

В.А. БОСТАНДЖИЯН

**ПОСОБИЕ ПО
СТАТИСТИЧЕСКИМ
РАСПРЕДЕЛЕНИЯМ**

УДК 519.281.1

ББК 22.172

Б 85

Б 85 **Бостанджиян В. А. Пособие по статистическим распределениям.** –
Черноголовка. Редакционно-издательский отдел ИПХФ РАН, 2013.
1060 с.

Данная монография посвящена одной из основных задач математической статистики – анализу статистических распределений. В ней целенаправленно для пользователей-практиков даётся изложение основных понятий теории вероятностей и математической статистики и классических методов теории и практики распределений, а для преодоления практических трудностей разработаны как новые методы, так и модификации некоторых известных. Рассмотрены основные методы оценивания параметров распределений и многие критерии согласия для проверки статистических гипотез относительно исследуемых распределений. Проведено подробное исследование нескольких десятков практически используемых в прикладной математической статистике одномерных дискретных (и полиномиального) и непрерывных распределений. Рассматривается оценивание их параметров методами квантилей, моментов и наибольшего правдоподобия по выборкам негруппированным и группированным, приведены дисперсии-ковариации выборочных распределений оценок параметров метода наибольшего правдоподобия.

Предлагаются алгоритмы аппроксимаций исследуемых неизвестных непрерывных распределений для составления их компьютерных программ с библиотекой более двадцати моделей распределений. Заканчивается книга практическим примером, на котором подробно иллюстрируется работа такой программы с оцениванием методами моментов и наибольшего правдоподобия параметров выбираемого ею (или задаваемого её пользователем) распределения.

Данная книга рассчитана на широкий круг научных и инженерно-технических работников и благодаря обширной библиографии по всем рассматриваемым вопросам и задачам (составленной в основном по РЖ «Математика») будет полезной как справочный и информационный источник специалистам в теории математической статистики. По объёму материала по статистическим распределениям и практической направленности она не имеет аналогов. Содержание глав 5, 6, 7 сопоставимо с содержанием трёхтомника по статистическим распределениям

Johnson N. L., Kotz S. Distributions in statistics:

1) Discrete distributions, 1969,

2) Continuous univariate distributions, – v. 1, 2, 1970,

Houghton Mifflin company, Boston.

ББК 22.172

Б 85

Уважаемый читатель!

*Возможные замечания о неточностях, ошибках в этой книге
и отзывы о ней автор с признательностью примет по адресам:*

e-mail: bostan@icp.ac.ru,

142432, Московская обл., г. Черноголовка, ИПХФ РАН.

ISBN 978-5-91845-038-3

© Бостанджиян В.А., 2013

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	6
От автора	8
Введение. Предмет и задачи математической статистики	11
Глава 1. Основные понятия теории вероятностей и математической статистики	
§1.1. Случайные события. Статистическая устойчивость и вероятность.....	15
§1.2. Законы теории вероятностей. Условная вероятность. Теорема и постулат Байеса.....	21
§1.3. Случайные величины, их типы и функции распределения.....	29
§1.4. Математическое ожидание, дисперсия и ковариация	42
§1.5. Другие числовые характеристики распределения	49
§1.6. Моменты. Проблема моментов	54
§1.7. Характеристики асимметрии и эксцесса	62
§1.8. Неравенство Чебышева и неравенства, связанные с ним.....	64
§1.9. Производящие и характеристическая функции	67
§1.10. Распределение функции от случайной переменной	74
Глава 2. Вычисление выборочных значений числовых характеристик распределений	
§2.1. Генеральная совокупность. Случайная выборка	80
§2.2. Техника случайного выбора	82
§2.3. Выборки группированные, усечённые, цензурированные.....	86
§2.4. Частотное группирование и регуляризация наблюдений выборки.....	89
§2.5. Распределение выборки и выборочное распределение	97
§2.6. Выборочные моменты и функции от них. Их асимптотические распределения	104
§2.7. Порядковые статистики и их выборочные распределения	117
§2.8. Оценивание числовых характеристик распределений порядковыми статистиками	125
§2.9. Вычисление моментов группированных распределений	130
§2.10. Квантили, медиана и мода группированных распределений.....	146
Глава 3. Оценивание параметров распределений	
§3.1. Вводные замечания об оценивании	151
§3.2. Характеризация выборочных оценок	157
§3.3. Метод моментов и метод квантилей	179
§3.4. Метод наибольшего правдоподобия	183
§3.5. Метод наибольшего правдоподобия при группированных и цензурированных выборках	198
§3.6. Метод наименьших квадратов и метод минимума хи-квадрат.....	204
§3.7. Метод доверительных интервалов	210
§3.8. Доверительные интервалы для квантилей и толерантные интервалы для распределений.....	220
Глава 4. Проверка статистических гипотез	
§4.1. Вводные замечания о проверке гипотез	231

§4.2. Некоторые задачи проверки статистических гипотез	239
1. Проверка гипотезы относительно вероятности	240
2. Критерии принадлежности двух выборок одной и той же генеральной совокупности:	242
а) Критерий знаков	242
б) Критерии Манна–Уитни и Вилкоксона	245
в) Критерий Смирнова в задаче о двух выборках	251
3. Критерий исключения ошибочных наблюдений	259
§4.3. Критерий согласия χ^2	265
§4.4. Критерий согласия ω^2	279
§4.5. Критерии согласия Колмогорова, Смирнова, Реньи	288
§4.6. Критерии согласия Колмогорова и Смирнова для дискретных и группированных распределений	304
§4.7. Частотный критерий согласия	310
§4.8. Энтропийный критерий согласия	313
§4.9. Критерий согласия размаха выборки	329
§4.10. Критерии нормальности	330

Глава 5. Дискретные распределения

§5.1. Вырожденное, равномерное и биномиальное распределения	337
§5.2. Гипергеометрическое распределение	368
§5.3. Геометрическое, отрицательное биномиальное и отрицательное гипергеометрическое распределения	382
§5.4. Логарифмическое распределение	400
§5.5. Распределение Пуассона	406
§5.6. Распределение маловероятных событий с переменной интенсивностью	421
§5.7. Некоторые замечания по выбору и оцениванию параметров дискретных распределений и применению к ним хи-квадрат критерия согласия	428
§5.8. Обобщённое биномиальное распределение Пуассона	436
§5.9. Полиномиальное и отрицательное полиномиальное распределения	441
§5.10. Уравнения, определяющие дискретные распределения	457

Глава 6. Непрерывные распределения

§6.1. Равномерное и треугольное распределения	463
§6.2. Нормальное распределение. Усечённое и свёрнутое нормальные распределения	474
§6.3. Распределение Коши	507
§6.4. Логарифмически нормальное распределение	519
§6.5. Гамма-распределение	535
§6.6. Распределения Эрланга, экспоненциальное, Лапласа	557
§6.7. Распределение Вейбулла	580
§6.8. Распределения экстремальных значений	601
§6.9. Бета-распределение и распределение арксинуса	613
§6.10. Распределения Парето и степенное	627
§6.11. Логистическое распределение	638
§6.12. Обратное нормальное (Гауссовское) распределение	648

Глава 7. Распределения, связанные с нормальным распределением

§7.1. χ -распределение	673
§7.2. Частные случаи χ -распределения: распределения полунормальное, Релея, Максвелла	676
§7.3. χ^2 -распределение. Нецентральное χ^2 -распределение	690
§7.4. Некоторые примеры применения χ^2 -распределения	701

§7.5. t -распределение. Нецентральное t -распределение.....	708
§7.6. Некоторые применения t_{ν} - и $t_{\nu}(a)$ -распределений.....	719
§7.7. F -распределение. Нецентральное F -распределение. z -распределение	725
§7.8. Некоторые применения F -распределений	739
§7.9. Ещё несколько критериев проверки гипотез о средних и дисперсиях нормальных распределений.....	743

Глава 8. Аппроксимация исследуемых распределений

§8.1. Ряды Брунса, Грама–Шарлье, Эджворта. Аппроксимация смесью распределений	748
Распределения Пирсона	
§8.2. Общие сведения.....	757
§8.3. I тип и II тип	766
§8.4. III тип и IV тип	791
§8.5. V тип.....	803
§8.6. VI тип	810
§8.7. VII тип.....	820
§8.8. Типы VIII и IX	829
§8.9. X тип.....	834
§8.10. XI тип и XII тип.....	836
§8.11. XIII тип.....	838
§8.12. Замечания к распределениям Пирсона. Распределения Бёрра	840
Распределения Джонсона	
§8.13. Общие сведения.....	863
§8.14. Распределение типа S_L	866
§8.15. Распределение типа S_B	872
§8.16. Распределение типа S_U	894
§8.17. Оценивание параметров δ и γ при известных ξ и λ	906
§8.18. Оценивание параметров методом квантилей.....	907
§8.19. Выбор аппроксимирующих распределений.....	914
§8.20. Алгоритмы аппроксимаций распределениями Пирсона, Джонсона, Вейбулла и обратным нормальным.....	926
§8.21. Вычисление неполных гамма-, бета-функции и функции распределения Пирсона IV типа.....	932
§8.22. Аппроксимация косвенно наблюдаемых распределений	942
§8.23. Программа аппроксимации статистических распределений APSTATDIST	945
ПРИЛОЖЕНИЕ. ТАБЛИЦЫ.....	958
ЛИТЕРАТУРА НА РУССКОМ ЯЗЫКЕ.....	987
ЛИТЕРАТУРА НА ИНОСТРАННЫХ ЯЗЫКАХ	1005