

**С.И. ХУДНЕВ**

---

**ПОРОГОВЫЕ  
ЯВЛЕНИЯ  
В НЕЛИНЕЙНЫХ  
УРАВНЕНИЯХ**

---



С.И. ХУДЯЕВ

ПОРОГОВЫЕ  
ЯВЛЕНИЯ  
В НЕЛИНЕЙНЫХ  
УРАВНЕНИЯХ



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ  
2003

УДК 530.1  
ББК 22.31  
Х 98

Худяев С. И. Пороговые явления в нелинейных уравнениях. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 272 с. — ISBN 5-9221-0450-0.

Книга написана по материалам оригинальных работ автора по математическому моделированию процессов воспламенения и горения, неизотермического течения вязкой и вязкоупругой жидкости, реологических особенностей и самоорганизации в структурированных текучих системах, фазовых переходов и процессов переноса излучения. Объединяющим началом исследования разнообразных моделей служат пороговые (критические) явления по тем или иным параметрам и их характер (изменение числа решений и скачкообразный переход с одного решения на другое, потеря устойчивости и бифуркация рождения цикла или более сложных пространственно-временных автоколебаний, автоволны и диссипативные структуры, изменение структуры асимптотики по малому параметру и большим значениям аргумента и т.д.). Излагаемый материал находится в русле современных исследований, за которыми закрепилось название синергетика.

Для научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области прикладной математики и математического моделирования.

Ил. 40. Библиогр. 216 назв.

Рецензенты:

доктор физ.-мат. наук А.Н. Иванова,  
доктор физ.-мат. наук К.Г. Шкадинский

# СОДЕРЖАНИЕ

Содержание . . . . .	3
Введение . . . . .	6
Раздел I . . . . .	11
§ 1. Элементарная модель теплового взрыва . . . . .	11
§ 2. Макрокинетическая модель неизотермического химического реактора . . . . .	15
2.1. Основные уравнения (15). 2.2. Тепловое самовоспламенение (17). 2.3. Зажигание (19). 2.4. Распространение пламени (20).	
§ 3. Неравенство Иенсена. Приближенное усреднение . . . . .	23
§ 4. Об уравнениях с распределенным источником . . . . .	28
4.1. Замена переменной (28). 4.2. Связь плоской и цилиндрической симметрий при $F(u) = \exp u$ (31). 4.3. Оператор Лапласа в цилиндрических и сферических координатах (32).	
Раздел II . . . . .	34
§ 5. Методика верхних и нижних функций . . . . .	34
5.1. Принцип монотонности (34). 5.2. Эллиптические уравнения (37).	
§ 6. Задача с параметром . . . . .	40
6.1. Некоторые простые свойства (40). 6.2. Порог разрешимости задачи (6.1) (42). 6.3. Разрешимость при $\lambda = \lambda_{кр}$ (43). 6.4. Оценки порогового значения $\lambda_{кр}$ (45).	
§ 7. Теория устойчивости . . . . .	49
7.1. Некоторые определения (49). 7.2. Критерии устойчивости (51). 7.3. Некоторые следствия (52). 7.4. Устойчивость на пределе разрешимости (55).	
§ 8. Порог устойчивости в задаче Фуджиты . . . . .	57
Раздел III . . . . .	61
§ 9. Основные характеристики теплового взрыва . . . . .	61
9.1. Некоторые общие свойства (61). 9.2. Период индукции для реакции нулевого порядка (63). 9.3. Приближенное усреднение (65).	
§ 10. Сферически-симметричная задача . . . . .	65
10.1. Введение параметра $q$ (65). 10.2. Случай $n = 0$ (68). 10.3. Устойчивость при $n = 0$ (70). 10.4. Случай $n = -1$ (71).	

10.5. Структура множества решений при $n > 0$ (72).	
10.6. Численный расчет $p(u)$ , $\delta_{кр}(n)$ (75).	
§ 11. Расчет порогового значения $\delta$ в областях сложной формы . . .	76
11.1. Цилиндр с теплоизолированным каналом (76). 11.2. По- лый цилиндр с идеальным теплообменом (78). 11.3. Геометри- ческая задача теории теплового взрыва (82). 11.4. Поправка на $\beta$ (84). 11.5. Пример задачи с распределенным источни- ком (86).	
§ 12. Тепловой взрыв самоускоряющейся реакции . . . . .	88
12.1. Квазистационарная теория (88). 12.2. Случай распреде- ленной температуры (91). 12.3. К теории управления экзотер- мической реакцией (94).	
§ 13. Зажигание полубесконечного цилиндра . . . . .	97
13.1. Критерий Зельдовича (97). 13.2. Полубесконечный ци- линдр. Усреднение (98). 13.3. Пороговое значение $\delta$ (100). 13.4. Второе решение (103).	
<b>Раздел IV</b> . . . . .	<b>105</b>
§ 14. Уравнение КПП (Колмогоров–Петровский–Пискунов) . . . . .	105
14.1. Стационарное уравнение. Непрерывный спектр скоро- стей (105). 14.2. О нижней границе спектра скоростей (111). 14.3. Промежуточная асимптотика в задаче ЗФК (в задаче Зельдовича–Франк–Каменецкого (117). 14.4. Асимптотика решения задачи (14.67) (119). 14.5. Численный алго- ритм (123). 14.6. Об устойчивости решений типа бегущей волны (124).	
§ 15. Асимптотика волны горения в конденсированной среде . . . . .	127
15.1. Уравнение. Основные параметры (127). 15.2. Случай $n \leq 1$ (128). 15.3. Случай $1 < n < 2$ (130). 15.4. Второй погранслои ( $1 < n < 2$ ) (132). 15.5. Сращивание. Асим- птотика скорости ( $1 < n < 2$ ) (135). 15.6. Заключительные замечания (137).	
§ 16. Пороговые явления в неадиабатической волне горения . . . . .	138
16.1. Усредненные уравнения. Основные параметры (138). 16.2. Построение решения (142). 16.3. Уравнения для газовых смесей. Внешнее решение (145). 16.4. Внутреннее решение. Сращивание (147).	
§ 17. Неединственность стационарной волны горения . . . . .	149
17.1. История вопроса (149). 17.2. Постановка задачи. Основ- ные параметры (151). 17.3. Внешнее и внутреннее реше- ние. Условия сращивания (154). 17.4. Случай $L = 0$ (158). 17.5. Область неединственности (161). 17.6. Анализ резуль- татов (163). 17.7. Устойчивость стационарных режимов и ав- токолебательные режимы (165).	
<b>Раздел V</b> . . . . .	<b>168</b>
§ 18. Пороговые явления при неизотермическом течении вязкой жидкости . . . . .	168
18.1. Куэттовское течение в случае заданного напря- жения (168). 18.2. Случай заданной скорости. Кривая течения (172). 18.3. Напорное течение в круглой трубе (173).	

§ 19. Конкуренное взаимодействие объемного тепловыделения и фронтального фазового превращения . . . . .	177
19.1. Воспламенение и потухание в переохлажденном цилиндрическом сосуде (177). 19.2. Квазистационарное приближение (180). 19.3. Напорное течение жидкости, затвердевающей с поверхности трубы (182). 19.4. Расходно-напорная характеристика (186). 19.5. Симметричное воспламенение в условиях фазового перехода (187).	
§ 20. Автоколебательное течение вязкоупругой жидкости . . . . .	189
20.1. Постановка задачи (189). 20.2. Сдвиговое течение (191). 20.3. Растяжение (194). 20.4. Пример из радиационной химии (197). 20.5. Заключительные замечания (200).	
<b>Раздел VI</b> . . . . .	201
§ 21. Реологическое поведение структурированных текучих систем . . . . .	202
21.1. Формулировка модели (202). 21.2. Кривая течения (203).	
§ 22. Течение Куэтта в плоском зазоре . . . . .	207
22.1. Постановка задачи (207). 22.2. Стационарные однородные режимы течения ( $-1 < \lambda < 0$ ) (208). 22.3. Пространственная неоднородность (212).	
§ 23. Напорное течение в трубе . . . . .	216
23.1. Постановка задачи (216). 23.2. Однородные решения (219). 23.3. Случай заданного расхода (221). 23.4. Случай заданного перепада давления (223).	
<b>Раздел VII</b> . . . . .	226
§ 24. Уравнение Амбарцумяна . . . . .	226
24.1. Некоторые сведения из теории уравнений Винера-Хопфа (226). 24.2. Уравнение Амбарцумяна (229). 24.3. Аналитические оценки (230). 24.4. Численное решение. Сопоставления (233).	
§ 25. К вопросу об асимптотике решения уравнения Винера-Хопфа при $x \rightarrow \infty$ . . . . .	235
25.1. Первая теорема (235). 25.2. Вторая теорема (242).	
<b>Приложение</b> . . . . .	245
П.1. Введение (245). П.2. Оценка снизу (245). П.3. Оценка сверху (247). П.4. Приближенный расчет $\bar{\lambda}(x)$ (249). П.5. Случай треугольных областей (251). П.6. Оценки для тела вращения (253).	
<b>Список литературы</b> . . . . .	255