

А. В. Жибер, Р. Д. Муртазина,
И. Т. Хабибуллин, А. Б. Шабат

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КОЛЬЦА ЛИ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ



А. В. Жибер, Р. Д. Муртазина,
И. Т. Хабибуллин, А. Б. Шабат

Характеристические кольца Ли и нелинейные интегрируемые уравнения



Москва ♦ Ижевск

2012

УДК 519.6
ББК 22.19
Х20



Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту № 12-01-07104

Издание РФФИ не подлежит продаже

Жибер А. В., Муртазина Р. Д., Хабибуллин И. Т., Шабат А. Б.

Характеристические кольца Ли и нелинейные интегрируемые уравнения. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012. — 376 с.

Книга посвящена систематическому изложению алгебраического подхода к исследованию нелинейных интегрируемых уравнений в частных производных и их дискретных аналогов, основанного на понятии характеристического векторного поля. Особое внимание уделяется уравнениям, интегрируемым в смысле Дарбу, и солитонным уравнениям. Обсуждается проблема построения высших симметрий уравнений, а также их частных и общих решений. В частности показано, что уравнение в частных производных гиперболического типа интегрируется в квадратурах тогда и только тогда, когда его характеристическое кольцо Ли имеет конечную размерность. Для гиперболических уравнений, интегрируемых методом обратной задачи, характеристическое кольцо имеет минимальный рост. Предложены пути применения метода характеристических колец к системам дифференциальных уравнений гиперболического типа с большим, чем два числом характеристических направлений, уравнениям эволюционного типа, а также к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

ISBN 978-5-4344-0092-3

ББК 22.19

© А. В. Жибер, Р. Д. Муртазина, И. Т. Хабибуллин, А. Б. Шабат, 2012

© Ижевский институт компьютерных исследований, 2012

<http://shop.rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

Оглавление

Введение	7
ГЛАВА 1. Скалярные интегрируемые уравнения	11
§ 1. Определение характеристического кольца Ли	11
§ 2. Классификация гиперболических уравнений с бесконечно- мерным характеристическим кольцом Ли минимального роста 13	
2.1. Уравнение Клейна–Гордона	13
2.2. Гиперболические уравнения $u_{xy} = f(u, u_x, u_y)$	19
2.2.1. Анализ пространства \mathcal{L}_4	19
2.2.2. Уравнение (2.18) с правой частью (2.23)	25
2.2.3. Анализ пространств L_6 и L_7 при $\dim L_6 =$ $= \dim L_7 = 2$	31
2.2.4. Уравнение $u_{xy} = K(u)L(u_x)\overline{B}(u_y)$	40
§ 3. Характеристическое кольцо Ли уравнения синус-Гордон	41
§ 4. Система уравнений $u_x = f(u, v)$, $v_y = \varphi(u, v)$	44
§ 5. Нелинейные интегрируемые уравнения с конечномерным ха- рактеристическим кольцом	48
§ 6. Уравнение $u_{xy} = f(u, u_x, u_y)$ с x - и y -интегралами второго порядка	55
§ 7. Линейные гиперболические уравнения	61
§ 8. Высшие симметрии интегрируемых уравнений	71
8.1. Симметрии уравнения Лиувилля	71
8.2. Симметрии уравнения синус-Гордон	72
8.3. Симметрии уравнения Цицейки	74
8.4. Симметрии модифицированного уравнения синус- Гордона	76
ГЛАВА 2. Системы гиперболических уравнений	85
§ 9. Симметрии. Характеристическое кольцо	85
9.1. Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана 85	

9.1.1.	Описание конечномерных характеристических алгебр	85
9.1.2.	Доказательство классификационной теоремы	92
9.1.3.	Стандартные бесконечномерные подалгебры	95
9.1.4.	Случай $\max a_{ij}a_{ji} = 2$	98
9.1.5.	Случай $\max a_{ij}a_{ji} = 1$	100
9.2.	Квадратичные системы	102
9.2.1.	Характеристические и полные кольца	104
9.2.2.	Симметрии системы (9.25)	110
9.3.	Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем	114
9.3.1.	Характеристическое и определяющее уравнения	114
§ 10.	Интегрируемость по Дарбу. Структура решений характеристических уравнений	128
§ 11.	Характеристические кольца Ли и критерий интегрируемости по Дарбу нелинейных гиперболических систем уравнений	138
§ 12.	Нелинейные гиперболические системы уравнений с интегралами первого порядка	141
§ 13.	Двухкомпонентные системы уравнений с интегралами первого и второго порядка	144
§ 14.	Квадратичные системы уравнений с интегралами первого и второго порядка	155
§ 15.	Задача Гурса	200
15.1.	Решение задачи Гурса для системы уравнений (14.36)	201
15.1.1.	Решение задачи Гурса для системы уравнений (15.4)	208
§ 16.	Линеаризация экспоненциальных систем ранга 2	219
ГЛАВА 3. Характеристические кольца Ли полудискретных цепочек гиперболического типа		229
§ 17.	Классификация цепочек частного вида, допускающих x -интеграл	232
17.1.	Необходимые условия существования x -интеграла	233
17.2.	Случай кратного нулевого корня	241
17.3.	Случай ненулевого корня характеристического уравнения	263
17.4.	Два ненулевых корня	268

17.5.	Характеристическое кольцо Ли L_x цепочки вида $t_{1x} = t_x + A_1(e^{\alpha t_1} + e^{\alpha t}) - A_2(e^{-\alpha t} - e^{-\alpha t_1})$	274
17.6.	Характеристическое кольцо Ли L_x цепочки вида $t_{1x} = t_x + A_1(e^{\alpha t_1} + e^{\alpha t}) + A_2(e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t_1})$	275
17.7.	Отыскание x -интегралов	281
§ 18.	Полная классификация цепочек вида $t_{1x} = t_x + d(t, t_1)$, интегрируемых по Дарбу	283
18.1.	Таблицы умножения для характеристических колец Ли L_x и L_n для интегрируемого по Дарбу уравнения $t_{1x} = t_x + d(t, t_1)$	299
18.1.1.	Случай 1: $t_{1x} = t_x + A(t_1 - t)$	300
18.1.2.	Случай 2: $t_{1x} = t_x + C_1(t_1^2 - t^2) + C_2(t_1 - t)$	300
18.1.3.	Случай 3: $t_{1x} = t_x + (C_3 e^{2\alpha t_1} + C_4 e^{\alpha(t_1+t)} + C_3 e^{2\alpha t})^{1/2}$	301
18.1.4.	Случай 4: $t_{1x} = t_x + C_5(e^{\alpha t_1} - e^{\alpha t}) + C_6(e^{-\alpha t_1} - e^{-\alpha t})$	301
18.2.	Кольца Ли L_n для интегрируемого по Дарбу уравнения $t_{1x} = t_x + d(t, t_1)$	301
18.2.1.	Случай 1: $t_{1x} = t_x + A(t_1 - t)$	301
18.2.2.	Случаи 2 и 4: $t_{1x} = t_x + C_1(t_1^2 - t^2) + C_2(t_1 - t)$ и $t_{1x} = t_x + C_5(e^{\alpha t_1} - e^{\alpha t}) + C_6(e^{-\alpha t_1} - e^{-\alpha t})$	302
18.2.3.	Случай 3: $t_{1x} = t_x + (C_3 e^{2\alpha t_1} + C_4 e^{\alpha(t_1+t)} + C_3 e^{2\alpha t})^{1/2}$	302
§ 19.	Структура интегралов	302
ГЛАВА 4. Полностью дискретные уравнения		313
§ 20.	Дискретные уравнения дивиллевского типа	313
§ 21.	Дискретные уравнения общего вида	319
§ 22.	S -интегрируемые дискретные уравнения	326
§ 23.	Метод поиска высших симметрий для уравнения на квадратной решетке	330
23.1.	Высшие симметрии и условия интегрируемости	333
23.2.	Алгоритм нахождения симметрий	337
23.3.	Пример вычисления неавтономной симметрии для уравнения на квадратной решетке	342
23.4.	Вычисление симметрии пятого порядка для уравнения на квадратной решетке	345

23.5.	Характеристические векторные поля высокого порядка и дополнительные дифференциальные следствия условий интегрируемости	350
ГЛАВА 5.	Перспективы алгебраического метода	353
§ 24.	Характеристические кольца уравнений « n -волн»	353
§ 25.	Эволюционные уравнения	355
25.1.	Кольца Ли эволюционных уравнений	355
25.2.	Присоединенные алгебры Ли	359
§ 26.	Системы обыкновенных дифференциальных уравнений . . .	361
Литература	365