

В.Ф. Формалев

ТЕПЛОПЕРЕНОС В АНИЗОТРОПНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ,
ТЕПЛОВЫЕ ВОЛНЫ,
ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ



$$S(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \left[u_{i,j}^k(\omega) - \bar{u}_{i,j}^k \right]^2$$

В.Ф. Формалев

ТЕПЛОПЕРЕНОС В АНИЗОТРОПНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ,
ТЕПЛОВЫЕ ВОЛНЫ,
ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2015

УДК 517.9
ББК 22.161
Ф 79

Формалев В.Ф. Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. — 280 с. — ISBN 978-5-9221-1624-4.

В монографии впервые систематически изложены теория конечно-разностных и конечно-элементных методов численного решения задач теплопроводности в анизотропных телах, математическая теория возникновения и распространения бегущих тепловых волн и тепловых ударных волн в изотропных и анизотропных телах, а также методология численного решения граничных и коэффициентных обратных задач по восстановлению тепловых потоков на границах анизотропных тел и линейных и нелинейных компонентов тензоров теплопроводности. Предложен и обоснован по аппроксимации и устойчивости новый класс экономичных абсолютно устойчивых методов численного решения задач теории теплопроводности со смешанными производными, по запасу устойчивости не имеющих аналогов в мире. На основе нового закона волнового теплопереноса получены аналитические и численные решения задач в условиях высокоинтенсивного и существенно нестационарного нагрева анизотропных тел, разработана новая методология численного решения обратных нелинейных задач анизотропной теплопроводности, в том числе с использованием методов регуляризации.

Для инженеров и научных работников, специализирующихся в области прикладной математики, прикладной механики, теплоэнергетики, а также для преподавателей и студентов старших курсов, обучающихся по дисциплинам «Уравнения математической физики», «Численные методы», «Теория тепло-массопереноса», «Теплоэнергетика», «Термоупругость», «Волновые процессы».

ISBN 978-5-9221-1624-4

© ФИЗМАТЛИТ, 2015
© В. Ф. Формалев, 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Введение	10
Глава 1. Методы конечных разностей численного решения задач теплопроводности в анизотропных телах	14
1.1. Основные определения и понятия в конечно-разностных методах	14
1.1.1. Аппроксимация и порядок аппроксимации	16
1.1.2. Устойчивость	17
1.1.3. Сходимость и порядок сходимости	18
1.1.4. Консервативность	19
1.2. Схема метода переменных направлений	20
1.3. Метод дробных шагов	26
1.4. Новый класс экономичных абсолютно устойчивых методов расщепления численного решения задач теплопроводности, содержащих смешанные производные	31
1.5. Экономичная полностью неявная конечно-разностная схема глубокого расщепления для уравнений, содержащих смешанные дифференциальные операторы, с использованием апостериорной информации	32
1.5.1. Аппроксимация схемы метода глубокого расщепления	37
1.5.2. Устойчивость схемы метода глубокого расщепления и обоснование введения параметра σ	40
1.5.3. Устойчивость схемы глубокого расщепления по правой части	44
1.5.4. Схема глубокого расщепления в трехмерном случае	46
1.6. Двусторонние схемы глубокого расщепления в задачах для параболических уравнений, содержащих смешанные производные и переменные коэффициенты	48
1.7. Асимметричная схема переменных направлений для параболических уравнений со смешанными производными	56
1.8. Схема метода глубокого расщепления в задачах для уравнений параболического типа со смешанными дифференциальными операторами и краевыми условиями, содержащими производные	60
1.8.1. Аппроксимация в узлах $(i_1, 0)$	62
1.8.2. Аппроксимация в узлах $(0, i_2)$	64
1.8.3. Аппроксимация в угловых узлах	66
1.9. Метод переменных направлений с экстраполяцией численного решения уравнений параболического типа со смешанными дифференциальными операторами	69

1.9.1. Схема метода переменных направлений с экстраполяцией . . .	69
1.9.2. Аппроксимация	72
1.9.3. Устойчивость	74
1.9.4. Схема метода МПНЭ в трехмерном случае	76
1.10. Методы глубокого расщепления и переменных направлений с экстраполяцией численного решения нелинейных задач для уравнений параболического типа, содержащих смешанные дифференциальные операторы.	79
1.10.1. Схема метода глубокого расщепления в нелинейных задачах для уравнений параболического типа со смешанными дифференциальными операторами	80
1.10.2. Схема метода переменных направлений с экстраполяцией в нелинейных задачах для уравнений параболического типа, содержащих смешанные дифференциальные операторы	90
1.10.3. Сравнительный анализ предложенных методов расщепления, учитывающих апостериорную информацию, для численного решения нелинейных задач, содержащих смешанные производные	97
Глава 2. Метод конечных элементов численного решения задач теплопроводности в анизотропных телах	105
2.1. Основы МКЭ	105
2.2. Система базисных функций	107
2.2.1. Кусочно-постоянные базисные функции	107
2.2.2. Линейные кусочно-непрерывные базисные функции	109
2.3. Методы взвешенных невязок. Весовые функции	110
2.3.1. Метод поточечной коллокации	111
2.3.2. Метод Галеркина	111
2.3.3. Метод наименьших квадратов	112
2.4. Конечно-элементный метод Галеркина решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений	112
2.4.1. Слабая формулировка метода Галеркина	113
2.4.2. Формирование локальной и глобальной матриц жесткости. Ансамблирование элементов	115
2.4.3. Случай граничных условий, содержащих производные	119
2.5. Метод конечных элементов в стационарных задачах теплопроводности анизотропных тел	120
2.5.1. Основные этапы решения стационарных задач анизотропной теплопроводности методом конечных элементов	120
2.5.2. Принципы разбиения плоских областей на конечные элементы	122
2.5.3. Аппроксимация линейными многочленами и базисные функции	123
2.5.4. Слабая формулировка конечно-элементного метода Галеркина	125
2.5.5. Ансамблирование элементов и построение глобальной СЛАУ	131
2.6. Метод конечных элементов в многомерных нестационарных задачах теплопроводности анизотропных тел	132

2.7. Особенности решения пространственных задач теплопроводности в анизотропных телах методом конечных элементов	135
2.8. Оценка погрешности метода конечных элементов	137
2.8.1. Погрешность конечно-элементного метода решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений	137
2.8.2. Погрешность конечно-элементного метода решения задач для уравнений в частных производных, содержащих смешанные дифференциальные операторы	142
Глава 3. Тепловые волны в изотропных и анизотропных телах . .	146
3.1. Новый закон волнового теплопереноса	146
3.2. Возникновение и распространение бегущих тепловых волн	149
3.3. О тепловых ударных волнах в нелинейных твердых средах	156
3.4. Волновой теплоперенос в анизотропном пространстве, характеристики которого зависят от температуры	161
3.4.1. Задача Коши	161
3.4.2. Первая начально-краевая задача	170
3.4.3. Условия возникновения бегущих тепловых волн в нелинейных анизотропных средах	174
3.5. Численное моделирование волнового теплопереноса в анизотропных средах	179
Глава 4. Обратные задачи теплопроводности в анизотропных телах	188
4.1. Постановка обратных задач теплопроводности в анизотропных телах	190
4.2. Общий алгоритм численного решения обратных задач идентификации постоянных параметров на основе неявных градиентных методов	193
4.3. Существование, единственность, устойчивость решений обратных задач теплопроводности в анизотропных телах	196
4.4. Граничная и коэффициентная обратные задачи теплопроводности на основе аналитического решения прямой задачи в анизотропном полупространстве	200
4.5. Учет погрешностей в экспериментальных данных	207
4.6. Коэффициентная обратная задача для параболических уравнений со смешанными производными по идентификации нелинейных компонентов тензора теплопроводности	209
4.6.1. Постановка задачи	209
4.6.2. Метод численного решения прямой задачи	213
4.6.3. Решение задачи, сопряженной с прямой задачей	217
4.6.4. Минимизация функционала невязки в неявном методе градиентного спуска	220
4.6.5. Итерационный алгоритм численного решения обратной коэффициентной задачи по определению нелинейных компонентов тензора теплопроводности	222

4.7. Некоторые результаты численного решения граничных и коэффициентных обратных задач теплопереноса в анизотропных телах. . .	224
4.7.1. Граничная обратная задача для уравнения теплопроводности по определению тепловых потоков к анизотропному полупространству	225
4.7.2. Коэффициентная обратная задача для уравнения теплопроводности по восстановлению компонентов тензора теплопроводности в анизотропном полупространстве и анизотропной пластине	228
4.7.3. Коэффициентная обратная задача для уравнения теплопроводности по восстановлению нелинейных компонентов тензора теплопроводности	234
4.8. Метод регуляризации по восстановлению тепловых потоков к границам анизотропной полосы	238
Приложение 1. Варианты метода прогонки	246
П1.1. Скалярная прогонка	246
П1.2. Метод прогонки с неявной аппроксимацией лучистого потока . .	249
Приложение 2. Градиентные методы минимизации функций многих переменных	253
П2.1. Метод градиентного спуска	253
П2.2. Метод наискорейшего спуска	257
П2.3. Метод сопряженных направлений	260
Список литературы	262