

БАКАЛАВРИАТ

*И.В. Белько, И.М. Морозова,  
Е.А. Криштанович*

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ,  
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА,  
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
ПРОГРАММИРОВАНИЕ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ





**И.В. БЕЛЬКО**

**И.М. МОРОЗОВА**

**Е.А. КРИШТАПОВИЧ**

# **ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ**

*Допущено  
Министерством образования Республики Беларусь  
в качестве учебного пособия для студентов  
учреждений высшего образования  
по экономическим специальностям*

Минск  
«Новое знание»

Москва  
«ИНФРА-М»

2016

УДК 519.2(075.8)  
ББК 22.17я73  
Б44

ФЗ № 436-ФЗ	Издание не подлежит маркировке в соответствии с п. 1 ч. 4 ст. 11
----------------	---

Рецензенты:

кафедра общей математики и информатики механико-математического факультета Белорусского государственного университета (зав. кафедрой — доктор физико-математических наук, профессор *В.А. Еровенко*);  
зав. кафедрой высшей математики Белорусского государственного экономического университета, доктор физико-математических наук, профессор *М.П. Дымков*

### **Белько, И.В.**

**Б44** Теория вероятностей, математическая статистика, математическое программирование : учеб. пособие / И.В. Белько, И.М. Морозова, Е.А. Криштапович. — Минск : Новое знание ; М. : ИНФРА-М, 2016. — 299 с. : ил. — (Высшее образование: Бакалавриат).

ISBN 978-985-475-759-9 (Новое знание).

ISBN 978-5-16-011748-5 (ИНФРА-М, print).

ISBN 978-5-16-104278-6 (ИНФРА-М, online).

Рассмотрены темы, изучаемые в третьей части курса «Высшая математика»: теория вероятностей, математическая статистика и математическое программирование. Каждая глава содержит теоретические основы с примерами, задачи с решениями и задачи для самостоятельной работы, снабженные ответами. Большинство примеров и задач имеют экономическую направленность. Пособие может быть использовано для самостоятельной подготовки по данным разделам курса высшей математики.

Для студентов и преподавателей экономических специальностей высших учебных заведений.

**УДК 519.2(075.8)**  
**ББК 22.17я73**

**ISBN 978-985-475-759-9 (Новое знание)**  
**ISBN 978-5-16-011748-5 (ИНФРА-М, print)**  
**ISBN 978-5-16-104278-6 (ИНФРА-М, online)**

© Белько И.В., Морозова И.М.,  
Криштапович Е.А., 2016  
© ООО «Новое знание», 2016

# Оглавление

<i>Предисловие</i> .....	8
--------------------------	---

## ЧАСТЬ I. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

<b>Глава 1. События и вероятности</b> .....	13
1.1. Элементы комбинаторики .....	13
1.2. События .....	16
1.3. Понятие вероятности .....	17
1.4. Действия над событиями .....	21
1.5. Теорема сложения вероятностей .....	24
1.6. Условные вероятности, теорема умножения вероятностей, независимость событий .....	27
1.7. Формула полной вероятности и формула Байеса .....	30
1.8. Аксиоматическое построение теории вероятностей .....	33
Задачи с решениями .....	36
Задачи для самостоятельного решения .....	43
<i>Ответы</i> .....	46
<b>Глава 2. Схема испытаний Бернулли</b> .....	47
2.1. Формула Бернулли .....	47
2.2. Формула Пуассона .....	50
2.3. Локальная формула Муавра – Лапласа .....	50
2.4. Интегральная формула Муавра – Лапласа .....	51
Задачи с решениями .....	52
Задачи для самостоятельного решения .....	55
<i>Ответы</i> .....	57
<b>Глава 3. Случайные величины и законы их распределения</b> .....	58
3.1. Общие сведения о случайных величинах .....	58
3.2. Дискретные случайные величины и операции над ними .....	60
3.2.1. Операции над случайными величинами .....	62
3.2.2. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины .....	63
3.2.3. Функция распределения дискретной случайной величины .....	65
3.3. Непрерывные случайные величины .....	67
3.4. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины .....	69

Задачи с решениями.....	70
Задачи для самостоятельного решения.....	78
<i>Ответы</i> .....	81
<b>Глава 4. Законы распределения случайных величин</b> .....	83
4.1. Законы распределения дискретных случайных величин.....	83
4.1.1. Постоянная случайная величина (вырожденное распределение).....	83
4.1.2. Альтернативная случайная величина (распределение Бернулли).....	83
4.1.3. Биномиальное распределение.....	84
4.1.4. Геометрическое распределение.....	85
4.1.5. Гипергеометрическое распределение.....	85
4.1.6. Закон Пуассона.....	86
4.2. Законы распределения непрерывных случайных величин.....	88
4.2.1. Равномерное распределение $R[a, b]$ .....	88
4.2.2. Показательное (экспоненциальное) распределение.....	89
4.2.3. Нормальное распределение.....	91
4.2.4. Логнормальное распределение.....	94
Задачи с решениями.....	96
Задачи для самостоятельного решения.....	100
<i>Ответы</i> .....	103
<b>Глава 5. Многомерные случайные величины</b> .....	104
5.1. Дискретные двумерные случайные величины.....	105
5.2. Функция распределения двумерной случайной величины.....	107
5.3. Непрерывные двумерные случайные величины.....	108
5.4. Независимые случайные величины. Ковариация, коэффициент корреляции.....	109
5.5. Двумерное нормальное распределение.....	112
Задачи с решениями.....	113
Задачи для самостоятельного решения.....	117
<i>Ответы</i> .....	118
<b>Глава 6. Закон больших чисел</b> .....	120
6.1. Неравенства Чебышева и Маркова.....	120
6.2. Закон больших чисел.....	121
6.3. Теорема Бернулли.....	122
Задачи для самостоятельного решения.....	123
<i>Ответы</i> .....	124

**ЧАСТЬ II. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА**

<b>Глава 7. Вариационные ряды и их характеристики</b> .....	128
7.1. Генеральная и выборочная совокупности.....	128
7.2. Понятие вариационного ряда и его графические изображения .....	129
7.3. Числовые характеристики вариационных рядов.....	136
Задачи с решениями .....	138
Задачи для самостоятельного решения.....	141
<i>Ответы</i> .....	143
<b>Глава 8. Оценка параметров генеральной совокупности</b> .....	144
8.1. Точечные оценки параметров.....	144
8.2. Основные статистические распределения.....	150
8.3. Интервальные оценки параметров.....	152
8.4. Доверительные интервалы для генеральной средней и генеральной доли выборки.....	152
8.5. Объем выборки.....	155
8.6. Доверительный интервал для дисперсии .....	156
Задачи с решениями .....	157
Задачи для самостоятельного решения.....	161
<i>Ответы</i> .....	163
<b>Глава 9. Проверка статистических гипотез</b> .....	164
9.1. Основные понятия .....	164
9.2. Гипотезы о значениях числовых характеристик.....	168
9.2.1. Гипотеза о численной величине среднего значения ...	168
9.2.2. Гипотеза о числовом значении дисперсии.....	170
9.2.3. Гипотеза о числовом значении доли признака .....	171
9.3. Проверка гипотезы о равенстве средних значений .....	172
9.4. Критерии согласия .....	174
Задачи с решениями .....	176
Задачи для самостоятельного решения.....	180
<i>Ответы</i> .....	182
<b>Глава 10. Однофакторный дисперсионный анализ</b> .....	184
10.1. Условия применения.....	184
10.2. Разложение суммы квадратов отклонений.....	185
10.3. Проверка гипотезы о равенстве групповых средних .....	186
10.4. Коэффициент детерминации .....	187

10.5. Сводка формул.....	188
Задачи с решениями.....	189
Задачи для самостоятельного решения.....	191
<i>Ответы</i> .....	192
<b>Глава 11. Корреляционный анализ</b> .....	193
11.1. Представление данных в корреляционном анализе.....	194
11.2. Коэффициент корреляции.....	195
11.3. Корреляционное отношение.....	197
Задачи с решениями.....	198
Задачи для самостоятельного решения.....	200
<i>Ответы</i> .....	201
<b>Глава 12. Регрессионный анализ</b> .....	202
12.1. Корреляционное поле.....	203
12.2. Линейная регрессия.....	203
12.3. Статистический анализ уравнения регрессии.....	205
Задача с решением.....	206
Задачи для самостоятельного решения.....	208
<i>Ответы</i> .....	208

### ЧАСТЬ III. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

<b>Глава 13. Классические задачи линейного программирования</b> .....	211
13.1. Задача о планировании производственной программы предприятия.....	211
13.2. Задача об оптимальной корзине продуктов (задача о диете).....	214
13.3. Задача оптимального раскроя материалов.....	216
13.4. Транспортная задача.....	218
13.5. Задача о назначениях.....	219
<b>Глава 14. Основные понятия задач линейного программирования и графический метод их решения</b> .....	221
14.1. Постановка общей задачи линейного программирования.....	221
14.2. Формы записи задач линейного программирования.....	222
14.3. Базисные и свободные переменные. Опорный план.....	223
14.4. Графическое решение задачи линейного программирования, сводимой к двум переменным.....	224

---

Задачи с решениями.....	227
Задачи для самостоятельного решения.....	231
<i>Ответы</i> .....	233
<b>Глава 15. Симплексный метод. Теория двойственности</b> .....	234
15.1. Симплексный метод решения ЗЛП .....	234
15.2. Двойственность в линейном программировании.....	243
15.2.1. Понятия анализа устойчивости и чувствительности .....	243
15.2.2. Понятие двойственности .....	246
15.3. Основные теоремы теории двойственности и их экономический смысл .....	250
15.4. Информационные технологии в решении задач математического программирования.....	255
Задачи для самостоятельного решения.....	265
Симплексный метод .....	265
Двойственность в линейном программировании.....	268
<i>Ответы</i> .....	269
<b>Глава 16. Транспортная задача</b> .....	270
16.1. Постановка транспортной задачи.....	270
16.2. Построение начального опорного плана .....	273
16.3. Проверка опорного решения на оптимальность.....	278
16.4. Переход к следующему распределению поставок.....	280
Задача с решением .....	283
Задачи для самостоятельного решения.....	289
<i>Ответы</i> .....	292
<b>Приложения</b> .....	293
<i>Литература</i> .....	298