



ВВЕДЕНИЕ

А. А. Абрамов

**В ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ
И РИМАНОВУ ГЕОМЕТРИЮ**



URSS

А. А. Абрамов

ВВЕДЕНИЕ В ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ И РИМАНОВУ ГЕОМЕТРИЮ

Рекомендовано
Учебно-методическим советом
Московского физико-технического института
(государственного университета)
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению
«Прикладные математика и физика»

Издание стереотипное



URSS

МОСКВА

ББК 22.151.4 22.161.6 22.311

Абрамов Александр Александрович

Введение в тензорный анализ и риманову геометрию. Изд. стереотип.
М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2017. — 128 с.

Настоящая книга содержит краткое изложение основных результатов тензорной алгебры, тензорного анализа и римановой геометрии. Она написана на основе лекций, прочитанных автором студентам Московского физико-технического института. Для понимания материала книги достаточно знаний по математическому анализу, линейной алгебре и теории обыкновенных дифференциальных уравнений в объеме общеузовских программ.

Книга предназначена для студентов математических, физических и инженерных специальностей, а также научных работников.

Рецензенты:

проф. Д. В. Беклемишев;
проф. М. М. Постников

Издательство «Книжный дом «ЛИБРОКОМ»». 117335, Москва, Нахимовский пр-т, 56.
Формат 60×90/16. Печ. л. 8. Доп. тираж. Зак. № АЛ-352.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД». 117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-397-05675-5

© А. А. Абрамов, 2004, 2016

© Книжный дом «ЛИБРОКОМ»,
2011, 2016

20587 ID 221870



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельцев.

Содержание

Предисловие	6
Глава 1. Тензорная алгебра	8
§ 1. Тензоры в линейном пространстве	8
1. Определение тензора	8
2. Соглашение об обозначениях	12
3. Алгебраические операции над тензорами	13
4. Другие возможности определения тензора	16
§ 2. Ориентация. Псевдотензоры	21
1. Ориентация	21
2. Псевдотензоры	23
§ 3. Тензоры в евклидовом пространстве	24
1. Общие соображения	24
2. Метрический тензор	25
3. Опускание и поднятие индексов	26
4. \sqrt{g}	29
Глава 2. Тензорный анализ	32
§ 1. Основные понятия	32
1. Гладкое многообразие	32
2. Касательное пространство	37
3. Тензорное поле	42
4. Векторное поле (пример тензорного поля)	42
5. Ориентация. Псевдотензорное поле	45
§ 2. Тензорные дифференциальные операции	46
1. Предварительные соображения и примеры	46
2. Определение тензорных дифференциальных операций в X^n	47
3. Некоторые дополнения	48

§ 3. Внешние дифференциальные формы	52
1. Антисимметричное ковариантное тензорное поле	52
2. Внешняя дифференциальная форма	53
3. Зачем нужны внешние дифференциальные формы	54
4. О псевдоформах	55
§ 4. Интегрирование	55
1. Интеграл и его свойства	56
2. Теорема Стокса—Пуанкаре	59
3. Об интеграле от дифференциальной псевдоформы	64
4. О теоремах Ньютона—Лейбница, Грина, Гаусса—Остроградского, Стокса	65
Глава 3. Риманова геометрия	67
§ 1. Риманово пространство	67
1. Основные понятия	67
2. Подпространства V^n	69
3. Геодезическая	72
§ 2. Параллельный перенос. Ковариантное дифференцирование	74
1. Формулы для параллельного переноса в H^n в криволинейной системе координат	75
2. Определение параллельного переноса в V^n	76
3. Параллельный перенос произвольных тензоров в V^n	80
4. Ковариантное дифференцирование	81
5. Связь между параллельным переносом в V^n и V^m , если V^m погружено в V^n	84
6. Координаты, геодезические в точке	85
7. Некоторые важные факты и формулы	86
§ 3. Тензор кривизны	88
1. Определение тензора кривизны	88
2. Аналитические свойства тензора кривизны	89
3. Геометрический смысл тензора кривизны	91
4. Условие того, что V^n — локально евклидово	96
§ 4. Коротко о пространствах аффинной связности	99
§ 5. Пространство V^2	102
1. V^2 , общие свойства кривизны	102
2. V^2 , погруженное в H^3 . Сферическое отображение	108

Дополнение. Топологические инварианты римановых пространств, получаемые интегрированием тензорных полей, строящихся по метрическому тензору	113
1. Полный интеграл от гауссовой кривизны	114
2. Интеграл Аллендорфера—Вейля	116
3. Тензорные поля Понтрягина	117
4. Существуют ли еще какие-либо тензорные поля, строящиеся по метрическому тензору и его производным и дающие дифференциально-топологические инварианты?	119
5. О топологической инвариантности дифференциально-топологических инвариантов, рассмотренных в пунктах 1–3	120