

Н.В. Ефимов

ВЫСШАЯ  
ГЕОМЕТРИЯ



*Н.В. Ефимов*

# *ВЫСШАЯ ГЕОМЕТРИЯ*

ИЗДАНИЕ СЕДЬМОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

*Рекомендовано Министерством образования  
Российской Федерации  
в качестве учебного пособия для студентов  
математических специальностей  
высших учебных заведений*



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ  
2003

УДК 514.1  
ББК 22.151.1  
Е91

Ефимов Н. В. **Высшая геометрия.** — 7-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 584 с. — ISBN 5-9221-0267-2.

---

Учебное издание

*ЕФИМОВ Николай Владимирович*

## **ВЫСШАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

Редактор *И.Л. Легостаева*  
Оригинал-макет: *В.Е. Рокотян*  
Оформление переплета: *А.Ю. Алехина*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 02.04.03.  
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 36,5. Уч.-изд. л. 39,25. Заказ № 2242

Издательская фирма «Физико-математическая литература»  
МАИК «Наука/Интерпериодика»  
117997 Москва, Профсоюзная, 90  
E-mail: fizmat@maik.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ПФ «Полиграфист».  
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3.  
Тел.: (8172) 72-55-31, 72-61-75, факс (8172) 72-60-72.  
E-mail: form.pfp@votel.ru <http://www.vologda/~pfpv>

ISBN 5-9221-0267-2



ISBN 5-9221-0267-2

© ФИЗМАТЛИТ, 2003

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к шестому изданию .....	6
Предисловие к пятому изданию .....	6
Предисловие к четвертому изданию .....	6
Предисловие к третьему изданию .....	7

### ЧАСТЬ I ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

Глава I. Краткий обзор исследований по основаниям геометрии .....	9
§ 1. Аксиомы Евклида ( $nn^{\circ}$ 1-4) .....	9
§ 2. Пятый постулат ( $nn^{\circ}$ 5-8) .....	14
§ 3. Н. И. Лобачевский и его геометрия ( $n^{\circ}$ 9) .....	30
§ 4. Формирование понятия геометрического пространства ( $n^{\circ}$ 10) .....	33
Глава II. Аксиомы элементарной геометрии .....	39
§ 1. Геометрические элементы ( $n^{\circ}$ 11) .....	39
§ 2. Группа I. Аксиомы связи ( $n^{\circ}$ 12) .....	39
§ 3. Группа II. Аксиомы порядка ( $n^{\circ}$ 13) .....	42
§ 4. Следствия из аксиом связи и порядка ( $nn^{\circ}$ 14-15) .....	43
§ 5. Группа III. Аксиомы конгруэнтности ( $n^{\circ}$ 16) .....	51
§ 6. Следствия из аксиом I-III ( $nn^{\circ}$ 17-19) .....	55
§ 7. Группа IV. Аксиомы непрерывности ( $nn^{\circ}$ 20-24) .....	68
§ 8. Группа V. Аксиома параллельности. Абсолютная геометрия ( $nn^{\circ}$ 25-27) .....	81
Глава III. Неевклидова теория параллельных .....	85
§ 1. Определение параллельных по Лобачевскому ( $nn^{\circ}$ 28-30) .....	85
§ 2. Особенности расположения параллельных и расходящихся прямых ( $nn^{\circ}$ 31-32) .....	96
§ 3. Функция Лобачевского $\Pi(x)$ ( $n^{\circ}$ 33) .....	101
§ 4. Прямые и плоскости в пространстве Лобачевского ( $nn^{\circ}$ 34-35) .....	105
§ 5. Эквидистантная поверхность и орицикл ( $nn^{\circ}$ 36-40) .....	112
§ 6. Эквидистантная поверхность и орисфера ( $nn^{\circ}$ 41-44) .....	122
§ 7. Элементарная геометрия на поверхностях пространства Лобачевского ( $nn^{\circ}$ 45-47) .....	127
§ 8. Площадь треугольника ( $n^{\circ}$ 48) .....	138

§ 9. Доказательство логической непротиворечивости геометрии Лобачевского ( $nn^{\circ}$ 49–54) .....	149
§ 10. Основные метрические соотношения в геометрии Лобачевского ( $nn^{\circ}$ 55–62) .....	169
§ 11. Краткие сведения о геометрии Римана ( $nn^{\circ}$ 63–68) .....	183
<b>Глава IV. Исследование аксиом элементарной геометрии</b> ....	192
§ 1. Три основные задачи аксиоматики ( $nn^{\circ}$ 69–70) .....	192
§ 2. Непротиворечивость аксиом евклидовой геометрии ( $n^{\circ}$ 71) ...	196
§ 3. Доказательство независимости некоторых аксиом евклидовой геометрии ( $nn^{\circ}$ 72–73) .....	211
§ 4. Аксиома полноты ( $n^{\circ}$ 74) .....	222
§ 5. Полнота системы аксиом евклидовой геометрии ( $n^{\circ}$ 75) .....	227
§ 6. Аксиоматический метод в математике ( $n^{\circ}$ 76) .....	230

## ЧАСТЬ II ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

<b>Глава V. Основы проективной геометрии</b> .....	232
§ 1. Предмет проективной геометрии ( $nn^{\circ}$ 77–83) .....	232
§ 2. Теорема Дезарга. Построение гармонических групп элементов ( $nn^{\circ}$ 84–88) .....	238
§ 3. Порядок точек на проективной прямой ( $nn^{\circ}$ 89–90) .....	251
§ 4. Разделенность гармонических пар; непрерывность гармонического соответствия ( $nn^{\circ}$ 92–93) .....	259
§ 5. Аксиома непрерывности. Проективная система координат на прямой ( $nn^{\circ}$ 94–97) .....	266
§ 6. Проективная система координат на плоскости и в пространстве ( $nn^{\circ}$ 98–102) .....	278
§ 7. Проективное соответствие между элементами одномерных многообразий ( $nn^{\circ}$ 103–105) .....	291
§ 8. Проективное соответствие между многообразиями двух и трех измерений ( $nn^{\circ}$ 106–108) .....	301
§ 9. Аналитические представления проективных отображений. Инволюция ( $nn^{\circ}$ 109–113) .....	311
§ 10. Формулы преобразования проективных координат. Сложное отношение четырех элементов ( $nn^{\circ}$ 114–119) .....	328
§ 11. Принцип двойственности ( $nn^{\circ}$ 120–124) .....	338
§ 12. Алгебраические кривые и пучки. Алгебраические поверхности и связки. Комплексная проективная плоскость и комплексное проективное пространство ( $nn^{\circ}$ 125–130) .....	352
§ 13. Образы второй степени. Теория поляр ( $nn^{\circ}$ 131–136) .....	361
§ 14. Конструктивные теоремы и задачи проективной геометрии ( $nn^{\circ}$ 137–154) .....	377

Глава VI. Теоретико-групповые принципы геометрии. Группы преобразований .....	405
§ 1. Геометрия и теория групп ( <i>nn</i> ° 155–158) .....	405
§ 2. Проективная группа и ее основные подгруппы ( <i>nn</i> ° 159–167) ..	410
§ 3. Геометрии Лобачевского, Римана и Евклида в проективной схеме ( <i>nn</i> ° 168–174) .....	423
Глава VII. Пространство Минковского .....	442
§ 1. Многомерное аффинное пространство ( <i>nn</i> ° 175–188) .....	441
§ 2. Евклидовы пространства и пространство Минковского ( <i>nn</i> ° 189–202) .....	458
§ 3. Пространство событий специальной теории относительности ( <i>nn</i> ° 203–214) .....	473

### ЧАСТЬ III ГЕОМЕТРИЯ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Глава VIII. Дифференциальные свойства неевклидовой метрики .....	491
§ 1. Метрическая форма евклидовой плоскости ( <i>n</i> ° 215) .....	491
§ 2. Вычисление расстояния между двумя точками на плоскости Лобачевского ( <i>nn</i> ° 216–219) .....	496
§ 3. Метрическая форма плоскости Лобачевского ( <i>nn</i> ° 220–224) ..	508
§ 4. Внутренняя геометрия поверхности и задача Бельтрами ( <i>nn</i> ° 225–226) .....	525
§ 5. Геометрия на поверхности постоянной кривизны ( <i>nn</i> ° 227–228) ..	532
§ 6. Вывод основных метрических соотношений в геометрии Лобачевского ( <i>nn</i> ° 229–233) .....	545
Глава IX. Пространственные формы геометрии постоянной кривизны .....	551
§ 1. Двумерные многообразия с дифференциально-геометрической метрикой ( <i>nn</i> ° 234–238) .....	551
§ 2. Параболические пространственные формы ( <i>nn</i> ° 239–241) .....	560
§ 3. Эллиптические пространственные формы ( <i>nn</i> ° 242–245) .....	567
§ 4. Гиперболические пространственные формы ( <i>nn</i> ° 246–249) .....	570
§ 5. Теорема Гильберта ( <i>nn</i> ° 250–261) .....	576