

Физико •  
Математическое  
Наследие

И. Г. МАЛКИН

# ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ



Физика  
Механика



**И. Г. Малкин**

# **ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ**

Издание четвертое



**URSS**  
**МОСКВА**

ББК 22.161.6 22.213

**Малкин Иоэль Гильевич**

**Теория устойчивости движения.** Изд. 4-е. — М.: Едиториал УРСС, 2017. — 432 с. (Физико-математическое наследие: физика (механика).)

В предлагаемой вниманию читателя книге дается систематическое изложение теории устойчивости движения и применяемых в ней методов, показано их приложение к решению конкретных практических задач. Первые три главы рассчитаны на читателя, который впервые знакомится с теорией устойчивости и не имеет серьезной математической подготовки; в последующих главах рассматривается более трудный по содержанию материал. Все излагаемые методы сопровождаются поясняющими примерами.

Книга рекомендуется специалистам — физикам и математикам-прикладникам, а также студентам и аспирантам.

Издательство «Едиториал УРСС». 117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 9.  
Формат 60×90/16. Печ. л. 27. Зак. № АХ-995.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД». 117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

**ISBN 978-5-354-01540-5**

© И. Г. Малкин, 1952, 2016  
© Едиториал УРСС, оформление,  
2004, 2016

20489 ID 218809



НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА	
	E-mail: URSS@URSS.ru
	Каталог изданий в Интернете: <a href="http://URSS.ru">http://URSS.ru</a>
	Тел./факс (многоканальный): + 7 (499) 724 25 45
	URSS

## ОГЛАВЛЕНИЕ.

	Стр.
Предисловие . . . . .	7
<b>Глава I. Основные понятия и определения . . . . .</b>	<b>9</b>
§ 1. Постановка задачи . . . . .	9
§ 2. Определение устойчивости . . . . .	10
§ 3. Дифференциальные уравнения возмущенного движения . . . . .	13
§ 4. Устойчивость по Ляпунову и некоторые другие определения устойчивости . . . . .	16
§ 5. О методах решения задачи устойчивости . . . . .	18
<b>Глава II. Второй метод Ляпунова для установившихся движений . . . . .</b>	<b>23</b>
§ 6. Основные определения . . . . .	23
§ 7. Признаки знакоопределенности и знакопеременности функций . . . . .	24
§ 8. Геометрическая интерпретация знакоопределенных функций . . . . .	29
§ 9. Первая теорема Ляпунова об устойчивости движения . . . . .	30
§ 10. Вторая теорема Ляпунова об устойчивости движения . . . . .	32
§ 11. Геометрическая интерпретация предыдущих теорем . . . . .	34
§ 12. Примеры приложения предыдущих теорем . . . . .	36
§ 13. Первая теорема Ляпунова о неустойчивости . . . . .	43
§ 14. Теорема Ляпунова о неустойчивости равновесия, когда силовая функция обращается в минимум . . . . .	44
§ 15. Вторая теорема Ляпунова о неустойчивости . . . . .	47
§ 16. Геометрическая интерпретация теоремы В. Теорема Н. Г. Четаева . . . . .	48
§ 17. Пример приложения теоремы Н. Г. Четаева, Теорема Н. Г. Четаева о неустойчивости равновесия . . . . .	50
§ 18. Заключительные замечания . . . . .	51
<b>Глава III. Критерии устойчивости по первому приближению для установившихся движений . . . . .</b>	<b>52</b>
§ 19. Уравнения первого приближения . . . . .	52
§ 20. Некоторые вспомогательные предложения . . . . .	57
§ 21. Построение функций Ляпунова для систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами . . . . .	61
§ 22. Теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению . . . . .	66
§ 23. Примеры приложения предыдущих теорем . . . . .	69
§ 24. Неустойчивость равновесия. Случай канонических систем . . . . .	71
§ 25. Теорема Гурвица . . . . .	74
§ 26. Обобщение теорем Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Приложение к регулируемым системам . . . . .	76
§ 27. Заключительные замечания . . . . .	83

Глава IV. Исследование критических случаев для установившихся движений . . . . .	85
§ 28. Случай одного нулевого корня. Приведение уравнений к специальному виду . . . . .	85
§ 29. Исследование задачи для случая системы первого порядка . . . . .	87
§ 30. Исследование задачи для системы $(n + 1)$ -го порядка в частном случае . . . . .	88
§ 31. Исследование задачи для системы $(n + 1)$ -го порядка в общем случае . . . . .	96
§ 32. Примеры . . . . .	99
§ 33. Особенный случай . . . . .	103
§ 34. Решение задачи устойчивости в особенном случае . . . . .	107
§ 35. Случай пары чисто мнимых корней. Приведение уравнений возмущенного движения к специальному виду . . . . .	113
§ 36. Системы второго порядка. Первый способ решения задачи . . . . .	115
§ 37. Системы второго порядка. Второй способ решения задачи . . . . .	126
§ 38. Системы второго порядка. Третий способ решения задачи . . . . .	134
§ 39. Вспомогательное предложение . . . . .	143
§ 40. Исследование системы $(n + 2)$ -го порядка в частном случае . . . . .	147
§ 41. Исследование системы $(n + 2)$ -го порядка в общем случае . . . . .	153
§ 42. Другой способ решения задачи . . . . .	163
§ 43. Особенный случай . . . . .	170
§ 44. «Опасные» и «безопасные» границы области устойчивости . . . . .	175
Глава V. Устойчивость периодических движений . . . . .	184
А. Теоремы второго метода для неустановившихся движений.	
§ 45. Некоторые определения . . . . .	184
§ 46. Теоремы Ляпунова об устойчивости для неустановившихся движений . . . . .	186
§ 47. Теорема Ляпунова о неустойчивости для неустановившихся движений . . . . .	190
§ 48. Теорема Н. Г. Четаева . . . . .	192
Б. Линейные уравнения с периодическими коэффициентами.	
§ 49. Постановка задачи . . . . .	193
§ 50. Характеристическое уравнение системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами . . . . .	194
§ 51. Аналитический вид решений в случае простых корней характеристического уравнения . . . . .	197
§ 52. Аналитический вид решений в случае кратных корней характеристического уравнения . . . . .	199
§ 53. Обратное предложение . . . . .	206
§ 54. Теорема Ляпунова о приводимости линейных уравнений с периодическими коэффициентами . . . . .	209
§ 55. Определяющее уравнение приведенной системы. Теорема Ляпунова о корнях характеристических уравнений сопряженных систем . . . . .	213
§ 56. Критерии устойчивости . . . . .	216
§ 57. Характеристическое уравнение канонических систем . . . . .	218
§ 58. Вычисление корней характеристического уравнения методом разложения по степеням параметра . . . . .	220

§ 59. Приложение к системе второго порядка . . . . .	223
§ 60. Некоторые технические задачи, приводящиеся к уравнению второго порядка с периодическими коэффициентами, и связанные с этим вопросы теории . . . . .	229
§ 61. Области устойчивости и неустойчивости для уравнений второго порядка . . . . .	238
§ 62. Практический способ определения областей устойчивости и неустойчивости для уравнений второго порядка . . . . .	246
§ 63. Примеры приложения метода предыдущего параграфа . . . . .	255

### В. Нелинейные уравнения с периодическими коэффициентами.

§ 64. Критерии устойчивости по первому приближению . . . . .	263
§ 65. Критические случаи . . . . .	266
§ 66. Критический случай, когда характеристическое уравнение имеет один, равный единице корень . . . . .	269
§ 67. Критический случай, когда характеристическое уравнение имеет два комплексных корня с модулями, равными единице . . . . .	278
§ 68. Устойчивость периодических движений автономных систем . . . . .	287

## Глава VI. Неустановившиеся движения . . . . . 292

### А. Некоторые общие предложения.

§ 69. Постановка задачи . . . . .	292
§ 70. Теорема об устойчивости при постоянно действующих возмущениях . . . . .	298
§ 71. Проблема существования функций Ляпунова . . . . .	297
§ 72. Некоторые свойства установившихся и периодических движений . . . . .	299
§ 73. Теорема о существовании функций Ляпунова для периодических и установившихся движений в случае асимптотической устойчивости . . . . .	302
§ 74. Основная теорема об устойчивости при постоянно действующих возмущениях для периодических и установившихся движений. Приложение к вопросу об «опасных» и «безопасных» границах области устойчивости . . . . .	307
§ 75. Условия существования функций Ляпунова для линейных уравнений в случае асимптотической устойчивости . . . . .	309

### Б. Теория первого приближения.

§ 76. Характеристичные числа Ляпунова . . . . .	317
§ 77. Основные свойства характеристичных чисел . . . . .	320
§ 78. Характеристичные числа решений линейных дифференциальных уравнений . . . . .	323
§ 79. Правильные и неправильные системы . . . . .	327
§ 80. Устойчивость характеристичных чисел систем линейных дифференциальных уравнений . . . . .	333
§ 81. Некоторые признаки устойчивости характеристичных чисел систем линейных дифференциальных уравнений . . . . .	335
§ 82. Критерий положительности характеристичных чисел . . . . .	342
§ 83. Оценка характеристичных чисел методом построения функций Ляпунова . . . . .	345
§ 84. Применение метода малого параметра . . . . .	348

### В. Теория устойчивости по первому приближению.

§ 85. Теорема об устойчивости по первому приближению . . . . .	355
§ 86. Некоторые особенности задачи устойчивости по первому приближению для неустановившихся движений . . . . .	357
§ 87. Критерий Ляпунова . . . . .	360
§ 88. Другая группа критериев . . . . .	364
§ 89. Связь с критерием Ляпунова. Обобщенный критерий . . . . .	367

### Г. Теория критических случаев.

§ 90. Постановка задачи. Основные определения . . . . .	369
§ 91. Первая основная теорема о критических случаях . . . . .	373
§ 92. Вторая основная теорема о критических случаях . . . . .	382
§ 93. Случай, когда коэффициенты линейных членов постоянны. Приложение к установившимся и периодическим движениям . . . . .	386
§ 94. Критический случай двойного нулевого корня для установившихся движений . . . . .	396
§ 95. Критический случай двух пар чисто мнимых корней для установившихся движений . . . . .	408
§ 96. Критический случай одного нулевого и пары чисто мнимых корней для установившихся движений . . . . .	418
§ 97. Критические случаи периодических движений. Приведение к установившимся движениям . . . . .	424
Именной указатель . . . . .	432

---