



**П.Н. Сапожников
А.А. Макаров
М.В. Радионова**

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

В ПРИМЕРАХ, ЗАДАЧАХ И ТЕСТАХ

УЧЕБНИК

**П.Н. САПОЖНИКОВ
А.А. МАКАРОВ
М.В. РАДИОНОВА**

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

В примерах, задачах и тестах

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

*Допущено НМС по математике Минобрнауки РФ
в качестве учебного пособия для студентов высших
учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки:
1.01.03.04, 1.01.04.04 «Прикладная математика» (квалификация
«Бакалавры», «Магистры» соответственно),
5.38.03.01, 5.38.04.01 «Экономика» (квалификация «Бакалавры»,
«Магистры» соответственно)*

Москва
КУРС
ИНФРА-М
2020

УДК 519.2(075.8)

ББК В172я73

С19

ФЗ
№ 436-ФЗ

Издание не подлежит маркировке
в соответствии с п. 1 ч. 4 ст. 11

Рецензенты:

В.С. Мхитарян — д-р экон. наук, профессор, руководитель департамента статистики и анализа данных Факультета экономических наук НИУ ВШЭ;

В.В. Чичагов — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Пермского государственного национального исследовательского университета, главный редактор межвузовского сборника научных трудов «Статистические методы оценивания и проверки гипотез»

Сапожников П.Н., Макаров А.А., Радионова М.В.

С19 Теория вероятностей, математическая статистика в примерах, задачах и тестах: учеб. пособие: — М.: КУРС: ИНФРА-М, 2020. — 496 с.

ISBN 978-5-906818-47-8 (КУРС)

ISBN 978-5-16-011956-4 (ИНФРА-М, print)

ISBN 978-5-16-104551-0 (ИНФРА-М, online)

Сборник содержит свыше 350 задач по основным разделам университетского курса «Теория вероятностей и математическая статистика», оформленных в виде заданий с четырьмя ответами, из которых только один правильный. Задания расположены по темам, что облегчает формирование как тематических, так и сводных тестов для текущего или итогового контроля знаний студентов.

В предисловиях к заданиям каждой темы рассматриваются необходимые для их решения понятия и методы теории вероятностей и математической статистики в доступной для студентов нематематических специальностей форме. Вместо доказательств большинство положений иллюстрируется на содержательных примерах, которые не только способствуют пониманию сущности понятий и утверждений, но и знакомят студентов с возможностями применения вероятностно-статистических методов. Несмотря на элементарный стиль изложения, все понятия и утверждения математически корректны и полностью соответствуют современным представлениям. Кроме того, сборник содержит решения всех заданий с анализом ошибочных ответов там, где это необходимо.

УДК 519.2(075.8)

ББК В172я73

Электронно-
Библиотечная
Система
znanium.com

233 323

ISBN 978-5-906818-47-8 (КУРС)

ISBN 978-5-16-011956-4 (ИНФРА-М, print)

ISBN 978-5-16-104551-0 (ИНФРА-М, online)

© Сапожников П.Н.,

Макаров А.А., Радионова М.В.,

2016, 2019

© КУРС, 2016, 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
--------------------------	---

СПИСОК ПРИНЯТЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ, СОКРАЩЕНИЙ И ТЕРМИНОВ	5
---	---

Раздел I

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ С ПРИМЕРАМИ

Глава 1. НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	6
---	---

1.1. Определения и свойства событий	6
1.2. Статистический и классический методы определения вероятности события	11
1.3. Элементы комбинаторики	13
1.4. Некоторые свойства вероятности	14
1.5. Геометрический метод определения вероятности	15
1.6. Аксиоматический подход в теории вероятностей	16
Задания к главе 1	19

Глава 2. УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ. НЕЗАВИСИМОСТЬ И ЗАВИСИМОСТЬ СОБЫТИЙ. ТЕОРЕМЫ УМНОЖЕНИЯ. ФОРМУЛЫ ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ФОРМУЛЫ БАЙЕСА. ПЛАНЫ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ. ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПРОСТРАНСТВ	28
--	----

2.1. Условные вероятности	28
2.2. Независимые и зависимые события	29
2.3. Формула полной вероятности	32
2.4. Планы случайных блужданий	33
2.5. Формулы гипотез или формулы Байеса	37
2.6. Прямое произведение пространств событий. Независимые испытания	39
Задания к главе 2	40

Глава 3. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО В СЛУЧАЕ БЕСКОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ИСХОДОВ. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	49
--	----

3.1. σ -алгебра подмножеств	49
3.2. Аксиома непрерывности и счетная аддитивность вероятностной меры	50
3.3. Наименьшие σ -алгебры, содержащие набор событий	54
3.4. Функции распределения вероятностных мер	56
3.5. Случайные величины	58
3.6. Математическое ожидание случайных величин	61
3.7. Теорема Радона—Никодима	63
3.8. Мера Лебега	65
3.9. Обобщение понятий условной вероятности и формулы полной вероятности	66
Задания к главе 3	68

Глава 4. ДИСКРЕТНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ	74
4.1. Дискретные случайные величины	74
4.2. Пуассоновское приближение биномиальных вероятностей	77
4.3. Функция распределения дискретной случайной величины	78
4.4. Непрерывные случайные величины	80
4.5. Теоремы Муавра—Лапласа	84
4.6. Некоторые распределения в теории надежности, теории массового обслуживания, демографии	86
4.7. Квантили и процентные точки случайных величин	91
4.8. Смеси распределений случайных величин	93
4.9. Имитация результатов наблюдений случайных величин	96
Задания 4	97
Глава 5. ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	105
5.1. Простейшие методы нахождения распределений функций случайных величин	105
5.2. Случайная величина χ^2_m	107
5.3. Некоторые общие формулы нахождения плотности распределения случайных векторов	109
5.4. Свертки распределений	111
5.5. Метод дифференциальных уравнений	114
5.6. Распределение порядковых статистик	115
Задания к главе 5	117
Глава 6. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	126
6.1. Математическое ожидание	126
6.2. Числовые характеристики разброса значений случайной величины	132
6.3. Моменты случайных величин и некоторые неравенства	134
6.4. Числовые характеристики векторных величин	137
6.5. Некоторые характеристики поведения плотности распределения	140
Задания к главе 6	143
Глава 7. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ	151
7.1. Свойства нормального распределения	151
7.2. Определение и свойства многомерного нормального распределения	155
7.3. Некоторые распределения, связанные с нормальным	159
7.4. Многомерный аналог распределений χ^2_n	164
Задания к главе 7	166
Глава 8. ПРИБЛИЖЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ФУНКЦИЯМИ ДРУГИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	174
8.1. Наилучшее приближение случайной величины посредством линейной функции другой случайной величины	174
8.2. Наилучшее приближение случайной величины линейной функцией l случайных величин	177
8.3. Функция, минимизирующая средний квадрат отклонения $M\{Y - h(X)\}^2$	178
8.4. Регрессия одной компоненты нормального вектора на другую	184
8.5. Процессы с независимыми приращениями	185
8.6. Прогноз поведения цепи Маркова с дискретным множеством состояний	187
Задания к главе 8	190

Глава 9. СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ. ЗАКОНЫ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ	199
9.1. Типы сходимости в теории вероятностей	199
9.2. Закон больших чисел (ЗБЧ)	201
9.3. Усиленный закон больших чисел (УЗБЧ)	205
9.4. Предельное поведение функций от сходящихся последовательностей и их математических ожиданий	208
9.5. Предельное поведение степеней переходных матриц однородной цепи Маркова	209
Задания к главе 9	216
Глава 10. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	224
10.1. Характеристические функции	225
10.2. Безгранично делимые законы распределения	230
10.3. Предельные распределения для нормализованных сумм	233
10.4. Центральная предельная теорема	236
10.5. Скорость сходимости и асимптотические разложения в ЦПТ	238
Задания к главе 10	242
Глава 11. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ. ОЦЕНИВАНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ	250
11.1. План испытаний, выборка, оценка	250
11.2. Методы оценивания параметров и функций параметров	255
11.3. Неравенство Рао—Крамера и эффективные оценки	261
11.4. Оптимальные несмещенные оценки	265
11.5. Метод наименьших квадратов	270
Задания к главе 11	272
Глава 12. ДОВЕРИТЕЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ	281
12.1. Нахождение доверительных множеств на основе ограниченных выборок	281
12.2. Метод центральных статистик	282
12.3. Оптимальные доверительные интервалы	285
12.4. Построение доверительных интервалов при больших выборках с помощью предельных распределений	290
12.5. Доверительное оценивание параметров линейных моделей	292
Задания к главе 12	295
Глава 13. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ	305
13.1. Некоторые типы гипотез	305
13.2. Критерии проверки гипотез о параметрах распределения	306
13.3. Критерий отношения правдоподобия	309
13.4. О проверке гипотез, когда функция правдоподобия монотонно зависит от достаточной статистики	316
13.5. Критерии согласия	317
13.6. Критерии однородности	318
13.7. Критерии случайности	319
13.8. Гипотезы независимости	320
13.9. Проверка гипотез о параметрах моделей Гаусса—Маркова	321
Задания к главе 13	323

Раздел 2

РЕШЕНИЯ И АНАЛИЗ ОТВЕТОВ

Глава 1. НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	332
Глава 2. УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ. НЕЗАВИСИМОСТЬ И ЗАВИСИМОСТЬ СОБЫТИЙ. ТЕОРЕМЫ УМНОЖЕНИЯ. ФОРМУЛЫ ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ФОРМУЛЫ БАЙЕСА	342
Глава 3. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО В СЛУЧАЕ БЕСКОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ИСХОДОВ. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	353
Глава 4. ДИСКРЕТНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ	362
Глава 5. ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	372
Глава 6. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	385
Глава 7. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ	397
Глава 8. ПРИБЛИЖЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ФУНКЦИЯМИ ДРУГИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	410
Глава 9. СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ. ЗАКОНЫ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ	422
Глава 10. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	430
Глава 11. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ. ОЦЕНИВАНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ	442
Глава 12. ДОВЕРИТЕЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ	457
Глава 13. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ	471
ПРАВИЛЬНЫЕ ОТВЕТЫ К ТЕСТАМ	481
ПРИЛОЖЕНИЯ	482
ЛИТЕРАТУРА	491