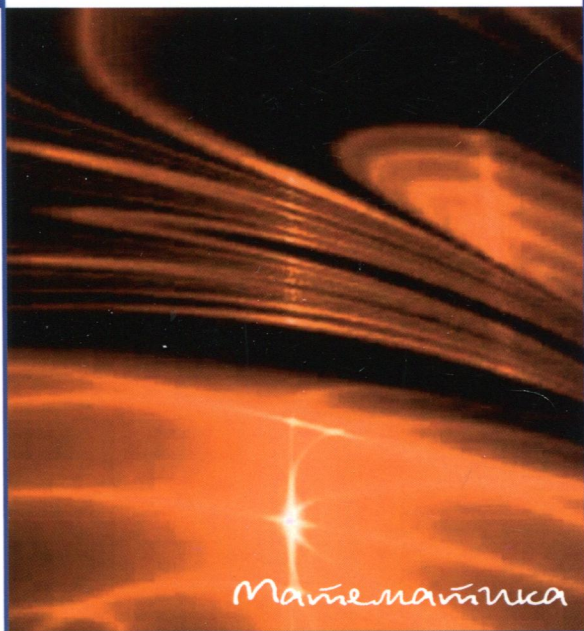


НАУЧНАЯ МЫСЛЬ



Е.Н. Орёл, О.Е. Орёл

ДИНАМИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

поиск абсолютного экстремума



НАУЧНАЯ МЫСЛЬ

СЕРИЯ ОСНОВАНА В 2008 ГОДУ



Е.Н. Орёл, О.Е. Орёл

ДИНАМИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПОИСК АБСОЛЮТНОГО ЭКСТРЕМУМА

МОНОГРАФИЯ

Электронно-
Библиотечная
znanium.com

Москва
ИНФРА-М
2020

УДК 519.6(075.4)
ББК 22.19
О65

Рецензенты:

Шановал А.Б., доктор физико-математических наук, доцент, профессор Департамента больших данных и информационного поиска, заведующий Научно-учебной лабораторией моделирования и управления сложными системами Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»;

Тищенко А.В., доктор физико-математических наук, профессор, профессор Департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий Финансового университета при Правительстве Российской Федерации

Орёл Е.Н.

О65 Динамическая оптимизация: поиск абсолютного экстремума : монография / Е.Н. Орёл, О.Е. Орёл. — Москва : ИНФРА-М, 2020. — 163 с. — (Научная мысль). — DOI 10.12737/monography_5cecfdb9a678e7.61184426.

ISBN 978-5-16-016233-1 (print)

ISBN 978-5-16-107738-2 (online)

Поиск глобального (абсолютного) экстремума требуется в большинстве приложений, связанных с экономикой, финансами, искусственным интеллектом и робототехникой. В монографии рассмотрены как методы, использующие необходимые и достаточные условия экстремума, так и прямые методы оптимизации. Материал снабжен многочисленными примерами и рисунками.

Для математиков, специалистов в сфере бизнеса и техники, студентов, изучающих модели и методы динамической оптимизации, а также всех интересующихся проблемой поиска глобального (абсолютного) экстремума в задачах оптимального управления и смежных разделах математики.

УДК 519.6(075.4)
ББК 22.19

Оглавление

Предисловие	7
Глава 1. Каноническая модель	11
1.1. Примеры.....	12
1.1.1. Кратчайшие кривые на плоскости Евклида.....	12
1.1.2. Минимизация издержек при выполнении заказа.....	16
1.1.3. Задача о движении автомобиля.....	17
1.1.4. Оптимальное распределение инвестиций между предприятиями.....	19
1.2. Описание общей модели.....	21
1.2.1. Система аксиом.....	23
1.2.2. Оптимальные траектории.....	24
1.2.3. Функционал времени.....	25
1.3. Множество траекторий с фиксированной начальной точкой.....	25
1.3.1. Функционалы, связанные с полем траекторий.....	27
1.3.2. Общий критерий оптимальности поля.....	27
1.3.3. Случай непрерывного времени.....	28
1.3.4. Случай интегрального функционала.....	30
1.4. Кратчайший путь на графе.....	31
1.4.1. Постановка задачи.....	31
1.4.2. Принцип Гюйгенса и алгоритм Дейкстры.....	31
1.4.3. Формальное описание алгоритма.....	32
1.4.4. Пример.....	34
Глава 2. Вариационное исчисление.....	37
2.1. Обычная постановка задачи.....	38
2.2. Следствия критерия оптимальности поля.....	38
2.2.1. Связь функции Лагранжа с функцией поля.....	38
2.2.2. Неравенство Вейерштрасса.....	39
2.2.3. Уравнение Эйлера-Лагранжа.....	39
2.2.4. Система уравнений Эйлера-Лагранжа.....	40
2.2.5. Импульс и функция Гамильтона.....	40
2.2.6. Законы сохранения.....	43
2.3. Поле оптимальных ломаных Эйлера.....	43
2.3.1. Постановка задачи.....	44
2.3.2. Переход к классу ломаных линий.....	45
2.3.3. Алгоритм построения поля.....	46
2.4. Решения примеров.....	47
2.4.1. Кратчайшие кривые на евклидовой плоскости.....	47
2.4.2. Кратчайшие кривые на плоскости Лобачевского.....	53

2.4.3. Кривые наискорейшего спуска (задача о брахистохроне)	55
2.4.4. Минимальная поверхность вращения	60
2.4.5. Максимизация прибыли в условиях самофинансирования	65
2.4.6. Минимизация издержек в рамках вариационного исчисления	67
Приложение к главе 2. Вариации и их применение	70
1. Основная лемма вариационного исчисления	71
2. Производная интеграла по параметру	72
3. Производная функции вдоль вектора	73
4. Вариация	74
5. Уравнение Дюбуа-Реймона	76
6. Следствия	78
Глава 3. Задачи оптимального управления с фиксированным временем	79
3.1. Центральные поля экстремалей Понтрягина	79
3.1.1. Формулировка задачи	79
3.1.2. Произведение (склейка) процессов и траекторий	80
3.1.3. Экстремали Понтрягина	82
3.1.4. Оптимальность гладкого поля экстремалей	83
3.2. Оптимизация с помощью движения по ячейкам	87
3.2.1. Недостатки решётчатой структуры	88
3.2.2. Ломаные в обобщённом смысле	89
3.2.3. Разбиение на ячейки	91
3.2.4. Алгоритм оптимизации	91
3.2.5. Обоснование алгоритма	93
3.3. Решение экономического примера	94
3.3.1. Описание	94
3.3.2. Построение экстремалей	95
3.3.3. Проверка аналитического критерия	97
Глава 4. Динамическое программирование	101
4.1. Задачи с фиксированным временем	102
4.1.1. Многошаговые процессы принятия решений	102
4.1.2. Свойства многошаговых процессов принятия решений	103
4.1.3. Функция Беллмана	104
4.1.4. Рекуррентное соотношение Беллмана	105
4.1.5. Стратегия	106
4.1.6. Построение оптимального процесса принятия решений	107
4.1.7. Решение задачи об оптимальном распределении инвестиций	107
4.2. Общий случай многошаговых процессов	112
4.2.1. Приближение в пространстве функций	112
4.2.2. Функциональное уравнение Беллмана	113
4.2.3. Множества траекторий и операторы	114
4.2.4. Последовательные приближения в динамическом программировании	116
Глава 5. Автономные задачи оптимального управления	119
5.1. Центральные поля в автономных задачах	119
5.1.1. Постановка задачи	119
5.1.2. Свойства траекторий	120
5.1.3. Принцип максимума Понтрягина	121
5.1.4. Центральное поле траекторий	122
5.1.5. Импульсы поля и функция Гамильтона-Понтрягина	123
5.2. Оптимизация маршрутов по ячейкам	124
5.2.1. Дуги и ячейки	125
5.2.2. Обобщённый граф	126

5.2.3. Модифицированный алгоритм Дейкстры	127
5.2.4. Игра с Природой	129
5.3. Примеры	132
5.3.1. Движение автомобиля к месту стоянки	132
5.3.2. Задача Бушоу	134
5.3.3. Задача об остановке маятника	141
Глава 6. Динамическая оптимизация в условиях конфликта и неопределённости	147
6.1. Игра «простое преследование»	148
6.1.1. Точное решение игры	148
6.1.2. Численное решение	150
6.2. Игра «шофёр-убийца»	152
6.3. Игра двух автомобилей	153
6.4. Оптимизация при дефиците информации	156
6.4.1. Задача о плоском перевёрнутом маятнике	156
Заключение	159
Библиографический список	161