

И.А. Александров

**ОПЕРАЦИОННОЕ
ИСЧИСЛЕНИЕ
И ЕГО
ПРИМЕНЕНИЯ**

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

И.А. Александров

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Учебное пособие

Допущено УМО по классическому университетскому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки высшего профессионального образования 010100 – «Математика», 010200 – «Математика и компьютерные науки», 010800 – «Математика и математическое моделирование»



Издательство Томского университета
2013

УДК 517.53(075.8)
ББК 22.161.5 Я 73
А 46

Александров И.А.

А 46 Операционное исчисление и его применения: учеб. пособие. -
Томск: Изд-во Том. ун-та, 2013. – 144 с.

ISBN 978-5-7511-2196-9

В учебном пособии операционное исчисление построено на интегральном преобразовании Лапласа. Указывается связь с преобразованием Фурье и операционным методом Хевисайда. Даны применения к решению линейных дифференциальных уравнений в обыкновенных и частных производных, к исследованию электрических цепей и механических систем.

Для студентов-математиков и инженеров, использующих в своей работе математические методы.

УДК 517.53(075.8)
ББК 22.161.5 Я 73

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
Глава 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА.....	5
§1. Предварительные сведения.....	5
1.1. Из истории создания метода.....	5
1.2. Кусочно-дифференцируемые функции	6
1.3. Голоморфные функции	7
§ 2. Интегральное преобразование Лапласа	10
2.1. Оригинал.....	10
2.2. Интеграл Лапласа	11
2.3. Изображение	13
§ 3. Простейшие свойства пары оригинал – изображение.....	14
3.1. Подобие и сдвиг.....	14
3.2. Смещение.....	17
§ 4. Дифференцирование и интегрирование оригинала	18
4.1. Дифференцирование оригинала.....	18
4.2. Интегрирование оригинала.....	19
§ 5. Дифференцирование и интегрирование изображения	20
5.1. Дифференцирование изображения	20
5.2. Интегрирование изображения	21
Задачи	22
Глава 2. ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА	24
§1. Теорема обращения интеграла Лапласа.....	24
1.1. Формула для оригинала.....	24
1.2. Доказательство теоремы 1	28
1.3. Достаточное условие	30
§ 2. Дробно-рациональные изображения	32
2.1. Теоремы разложения.....	32
2.2. Простые полюсы.....	34
2.3. Необходимое и достаточное условие.....	36
2.4. Дробно-рациональные изображения с действительными коэффициентами.....	37
§ 3. Мероморфные отображения	39
3.1. Изображения с бесконечным множеством простых полюсов	40
3.2. Пример применения теоремы б.....	41
§ 4. Изображения голоморфные на бесконечности.....	41
4.1. Изображения представленные рядом Лорана	41
§ 5. Теоремы умножения	44
5.1. Умножение изображений.....	44
5.2. Свертка оригинала.....	45
5.3. Формула Дюамеля.....	45

5.4. Умножение оригиналов.....	46
Задачи.....	47
Глава 3. ОСОБЫЕ ОРИГИНАЛЫ И ИЗОБРАЖЕНИЯ.....	49
§ 1. Преобразование Лапласа для особых оригиналов.....	49
1.1. Степенная функция с дробным показателем.....	49
1.2. Примеры изображений, содержащих \sqrt{p}	51
1.3. Изображение логарифма.....	52
1.4. Изображение функций, связанных с интегралом вероятностей.....	53
1.5. Изображения интегралов Френеля.....	54
§ 2. Импульсные функции.....	55
2.1. Дельта-функция.....	55
2.2. Импульсные функции высших порядков.....	57
Задачи.....	61
Глава 4. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПЕРАЦИОННОГО МЕТОДА.....	63
§ 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения.....	63
1.1. Основная задача.....	63
1.2. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами.....	64
1.3. Линейные уравнения с переменными коэффициентами.....	67
1.4. Системы линейных дифференциальных уравнений.....	68
§ 2. Уравнения в частных производных.....	73
2.1. Теплопроводность.....	73
2.2. Продольное колебание стержня.....	75
§ 3. Расчет электрических цепей.....	77
3.1. Двухполюсники.....	77
3.2. Взаимоиндукция.....	78
3.3. Законы Кирхгофа.....	79
3.4. Колебательный контур.....	80
3.5. Трансформатор.....	83
3.6. Шунтированный контур.....	86
Задачи.....	88
Глава 5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА.....	91
§ 1. Ряд Фурье.....	91
1.1. Функции с периодом 2π	91
1.2. Достаточные условия разложения функции в ряд Фурье.....	92
1.3. Комплексная форма ряда Фурье.....	94
1.4. Ряд Фурье для функций с произвольным периодом.....	95
§ 2. Континуальный аналог ряда Фурье.....	96
2.1. Двойной интеграл Фурье.....	96
2.2. Интеграл Фурье.....	97
2.3. Комплексная форма записи интеграла Фурье.....	98
§ 3. Связь между интегральными преобразованиями Лапласа и Фурье.....	99
3.1. Преобразование Лапласа и комплексный интеграл Фурье.....	99
3.2. Преобразование Хевисайда.....	100
Задачи.....	100
Глава 6. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА.....	102
§ 1. Решетчатые функции и их изображения.....	102
1.1. Решетчатая функция.....	102
1.2. Дискретное преобразование Лапласа.....	104
§ 2. Свойства дискретного преобразования.....	105
2.1. Запаздывание и опережение.....	105
2.2. Смещение.....	107

2.3. Дифференцирование и интегрирование изображения	107
2.4. Конечная разность	111
2.5. Разность и сумма решетчатой функции.....	112
2.6. Свертка решетчатых функций.....	113
2.7. Сверка изображений	114
§ 3. Решение уравнений в конечных разностях	115
3.1. Разностные уравнения	115
3.2. Линейное уравнение в конечных разностях	117
Задачи	117
ЛИТЕРАТУРА	119
ПРИЛОЖЕНИЯ	120